

Quantificateurs, Logique, Raisonnements

Extrait du programme officiel :

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.

Contenus

Capacités & commentaires

Rudiments de logique

Quantificateurs.

L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.

Implication, contraposition, équivalence.

Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.

Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.

Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).

On pourra relier le raisonnement par récurrence au fait que toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément. Toute construction et toute axiomatique de \mathbb{N} sont hors programme.



Table des matières

1	Quantificateurs, Logique, Raisonnements	1
I	Éléments de logique	3
1	Assertions	3
2	Connecteurs logiques	3
a	Négation	3
b	Conjonction et disjonction	4
c	Implication	5
d	Équivalence	6
3	Propriétés	7
4	Méthodes de démonstration	9
a	Raisonnements directs	9
b	Raisonnement par l'absurde	10
c	Le raisonnement par contraposée	11
II	Quantificateurs	12
1	Définitions	12
2	De l'ordre des quantificateurs	13
3	Négation des quantificateurs	14
III	Principe de récurrence	15
1	Récurrence simple	15
2	Récurrence à pas fixé	17
3	Récurrence forte	18

Éléments de logique

1 Assertions

On rencontre en mathématiques (plus précisément en logique mathématique) des phrases appelées **assertions**, **énoncés** ou **propositions** que l'on ne définira pas formellement : on retiendra simplement qu'elles peuvent être soit vraies (V) soit fausses (F) (mais pas les deux simultanément).

Exemples 1

- E1 – L'assertion « $1 + 1 = 2$ » est vraie.
- E2 – L'assertion « $1 > 2$ » est fausse.

Certaines de ces assertions sont posées comme vraies par convention : on parle d'**axiomes**.

D'autres sont démontrées comme étant vraies : on parle de **théorème** ou de **propriété** (ou encore de **proposition**, attention...)

Le but du mathématicien est de formuler des assertions (à ce stade on parle de **conjecture**), puis de démontrer leur véracité à partir d'autres résultats démontrés.

Une **table de vérité** est un tableau qui indique si une formule $P(A, B, C, \dots)$ (appelée **prédicat** : assertion dépendant de paramètres), construite à partir d'assertions A, B, C, \dots , est vraie ou fausse suivant la véracité de A, B, C, \dots

Remarque 1

Lorsque l'on écrit une assertion P seule, il est sous-entendu qu'elle vraie. Par exemple : « $1 + 1 = 2$ ».

2 Connecteurs logiques

a Négation

Définition 1 : Négation

Soit P une assertion.

On définit la **négation** « non P » de P , notée \bar{P} ou $\neg P$, comme étant l'assertion fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

P	non P
V	F
F	V

Table 1.2 – Table de vérité de la négation.



Exemples 2

- E1 – La négation de « Il pleut tous les jours. » est « Il ne pleut pas certains jours. » ou encore « Il y a au moins jour où il ne pleut pas. »,
- E2 – La négation de « Tout le monde est présent. » est « Il y a au moins un absent. »,
- E3 – La négation de « La fonction f est la fonction nulle » est « $f(x) \neq 0$ pour au moins une valeur de x »,
- E4 – La négation de « $ab = 0$ » est « $a \neq 0$ et $b \neq 0$ »,
- E5 – La négation de « $a > b$ » est « $a \leq b$ ».

b Conjonction et disjonction

Définition 2 : Conjonction et disjonction

Soient P et Q deux assertions.

On définit la **conjonction** « P et Q » des assertions P et Q , notée $P \wedge Q$, comme étant l'assertion vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies, fausse sinon.

On définit la **disjonction** « P ou Q » des assertions P et Q , notée $P \vee Q$, comme étant l'assertion vraie lorsque l'une au moins des assertions P et Q est vraie, fausse sinon.

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Table 1.3 – Table de vérité de la disjonction et la conjonction.

Remarques 1

R1 – Le *ou* mathématique est le *ou inclusif*.

R2 – On utilise bien souvent la notation $\begin{cases} P \\ Q \end{cases}$ pour « P et Q » et parfois $\begin{array}{l} P \\ \text{ou} \\ Q \end{array}$ pour « P ou Q ».

C Implication

Définition 3 : Implication

Étant donné des assertions P et Q , l'**implication**, notée $P \implies Q$ et lue « P implique Q » est l'assertion « Si P est vraie, Q est vraie » :

- vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P est fausse,
- fausse sinon.

Il s'agit de l'assertion $\bar{P} \vee Q$ (c'est-à-dire (non P) ou Q).

P est appelé l'**hypothèse** de l'implication, et Q sa **conclusion**.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table 1.4 – Table de vérité de l'implication.

Exemple 1

"Il pleut" \implies "Il y a des nuages". Les deux dernières lignes s'expliquent par le fait qu'une journée sans pluie (qu'il y ait ou non des nuages) ne peut contredire cette affirmation!

Propriété 1

Dire que $P \not\equiv Q$, c'est dire que P est vraie et pourtant Q est fausse.
Autrement dit, la négation de $P \implies Q$ est $P \wedge \bar{Q}$ (c'est-à-dire P et (non Q)).

Exemple 2

La négation de "Il pleut" \implies "Il y a des nuages" est "Il pleut et pourtant il n'y a pas de nuage".

Propriété 2

Soient P et Q des assertions.

Dire que $P \implies Q$ est vraie, c'est dire que :

- « Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie » (**Condition nécessaire**),
- « Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie » (**Condition suffisante**).

Remarque 2




En supposant vrai quelque chose de faux, on pourrait démontrer n'importe quoi!



Exemple 3

« Je suis en sup » \Rightarrow « J'ai le Bac » est vraie.

Remarques 2

- R1 –  : « $P \Rightarrow Q$ » (vrai) ne veut pas dire P vraie : par exemple, « $1 > 2 \Rightarrow 2 > 4$ » est vraie et pourtant « $1 > 2$ » est fausse.
- R2 –  : On peut avoir quelques bizarreries : « $0 \neq 0$ » \Rightarrow « $0 = 0$ » est vraie et « $0 = 0$ » \Rightarrow « L'eau de mer est salée. » l'est tout autant !
- R3 –  : Ce n'est pas parce que « $P \Rightarrow Q$ » est vrai que « $Q \Rightarrow P$ » l'est : par exemple, « Je suis en sup » \Rightarrow « J'ai le Bac » est vrai et pourtant « J'ai le Bac » \Rightarrow « Je suis en sup » ne l'est pas!!!

Définition 4 : Implication réciproque

Soient P et Q deux assertions.

L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée **implication réciproque** de $P \Rightarrow Q$

d Équivalence

Définition 5 : Équivalence

Étant donné des assertions P et Q , l'**équivalence**, notée $P \Leftrightarrow Q$ et lue « P est équivalent à Q » est l'assertion $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table 1.5 – Table de vérité de l'équivalence.

Propriété 3

Soient P et Q des assertions.

« $P \Leftrightarrow Q$ » est synonyme des trois assertions suivantes :

- « P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses »,
- « P est vraie si et seulement si Q est vraie »,
- « Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie » (**Condition nécessaire et suffisante** ou **Caractérisation**).

Remarque 3

On a fait le bon choix pour les deux premières lignes de la table de vérité de « $P \implies Q$ ». Sinon on serait retombé sur l'une des autres relations :

P	Q	$P \text{ et } Q$	$Q \text{ et } P$	$P \iff Q$	$P \implies Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	V

3 Propriétés

Propriété 4

Soient P, Q, R des assertions.

(i) $\overline{\overline{P}} \iff P$

(ii) Lois de Morgan¹ :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff [(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)] \quad \text{ie} \quad \overline{P \vee Q} \iff \overline{P} \wedge \overline{Q}$$

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff [(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)] \quad \text{ie} \quad \overline{P \wedge Q} \iff \overline{P} \vee \overline{Q}$$

(iii) Distributivités :

$$[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \iff [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)] \quad \text{ie} \quad P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \iff [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)] \quad \text{ie} \quad P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

(iv) Rappel : $[P \implies Q] \iff [(\text{non } P) \text{ ou } Q]$

(v) L'implication $((P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R)) \implies (P \implies R)$ est (toujours) vraie.

(vi) Rappel :

$$\text{non}(P \implies Q) \iff [P \text{ et } (\text{non } Q)]$$

(à la base du raisonnement par **l'absurde**)

(vii) $[P \implies Q] \iff [(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)]$

(à la base du raisonnement par **contraposée**)

(viii) $[P \iff Q] \iff [(\text{non } P) \iff (\text{non } Q)]$

1.



Augustus de Morgan (Madurai Tamil Nadu (Inde), 1806 - Angleterre, 1871) est un mathématicien anglais particulièrement célèbre pour ses apports en logique et plus particulièrement les lois qui portent son nom sur la négation de la conjonction et de la disjonction en logique, et son équivalent en théorie des ensembles pour le complémentaire d'une réunion et d'une intersection.



Démonstration 1

- (i) Dire que la négation de P est fausse, c'est dire que ... P vraie!
- (ii) Table de vérité
- (iii) Table de vérité
- (iv) ok
- (v) Table de vérité de $A = ((P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	A
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

(vi) En utilisant la loi de Morgan :

$$\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \text{non}((\text{non } P) \text{ ou } Q) \Leftrightarrow [\text{non}(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)] \Leftrightarrow [P \text{ et } (\text{non } Q)]$$

(vii) $[(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)] \Leftrightarrow [\text{non}(\text{non } Q) \text{ ou } (\text{non } P)] \Leftrightarrow [(\text{non } P) \text{ ou } Q] \Leftrightarrow [P \Rightarrow Q]$.

(viii) Dire que P et Q ont même valeur logique, c'est dire que c'est aussi le cas pour $\text{non } P$ et $\text{non } Q$.

Remarques 3

R1 – D'après (iii), dire que $\left\{ \begin{array}{l} P \\ Q \\ \text{ou} \\ R \end{array} \right.$ c'est dire que $\left\{ \begin{array}{l} P \\ \text{ou} \\ P \\ R \end{array} \right.$ et dire que $\left\{ \begin{array}{l} P \\ \text{ou} \\ Q \\ R \end{array} \right.$ c'est dire que $\left\{ \begin{array}{l} P \text{ ou } Q \\ P \text{ ou } R \end{array} \right.$

R2 – D'après (v) si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$, alors $P \Rightarrow R$. On dit que l'implication est **transitive**. Pour $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow R)$, on note $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$.

Exemple 4

« Je suis en sup » \Rightarrow « J'ai le Bac » et « J'ai le Bac » \Rightarrow « Je sais compter » sont vraies, donc « Je suis en sup » \Rightarrow « Je sais compter » est également vraie.

4 Méthodes de démonstration

a Raisonnements directs

- Pour démontrer une assertion, on peut bien sûr le faire directement en la déduisant d'un résultat connu.

Exemple 5

C'est le cas lorsque vous appliquez un théorème connu dans un raisonnement.

- Pour démontrer que P ou Q est vraie, on peut aussi supposer P est fausse et montrer que dans ce cas Q est vraie.
(En effet, $((\text{non}P) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \text{ ou } Q)$.)
- Pour démontrer directement $P \Rightarrow Q$, on **suppose** P vraie et on essaye de montrer que Q est vraie.

Dans ce cas, on rédige **toujours** :

Supposons que (P vraie).
 Montrons que/but (Q est vraie).
 ⋮
 Donc (Q est vraie).

- Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est fausse, il suffit de (et il faut) démontrer que P est vraie et pourtant Q est fausse.
(En effet, $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et non } Q$.)
- Pour montrer que $P \Leftrightarrow Q$, on procède généralement de l'une des manière suivantes :
 - ★ soit on démontre $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$,
 - ★ soit on démontre

$$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P_n \Leftrightarrow Q$$

où P_1, \dots, P_n sont des assertions intermédiaires.

Exemple 6

Chercher une condition nécessaire et suffisante sur des réels a et b pour que $x^2 + ax + b = 0$ ait deux solutions réelles non nulles et opposées.

- **Condition nécessaire (Analyse)** : Supposons que ce soit le cas. Soient r et $-r$ les solutions. On a

$$\begin{cases} r^2 + ar + b = 0 \\ r^2 - ar + b = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} 2ar = 0 & L_1 \Leftarrow L_1 - L_2 \\ r^2 - ar + b = 0 \end{cases}$$

et $\begin{cases} a = 0 & (\text{car } r \neq 0.) \\ r^2 = -b \end{cases}$

Si c'est le cas, on a donc nécessairement $a = 0$ et $b < 0$.

- **Condition suffisante (Synthèse)** : Réciproquement, on suppose $a = 0$ et $b < 0$.



But : $x^2 + ax + b = 0$ (1) a deux solutions réelles non nulles et opposées.
 Or (1) $\Leftrightarrow x^2 = -b \Leftrightarrow x = \sqrt{-b}$ ou $x = -\sqrt{-b}$ (car $-b > 0$), avec $\sqrt{-b} \neq 0$.

- **Conclusion** : On a montré que

$x^2 + ax + b = 0$ a deux solutions réels non nulles et opposées ssi $a = 0$ et $b < 0$.

Remarque 4

Dans cet exemple, on dit qu'on a raisonné par **condition nécessaire/condition suffisante** ou **analyse/synthèse**.

- Pour montrer une suite d'équivalences du type $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Leftrightarrow P_3$, il suffit de montrer $P_i \Rightarrow P_j$ puis $P_j \Rightarrow P_k$ et enfin $P_k \Rightarrow P_i$ — c'est-à-dire $P_i \Rightarrow P_j \Rightarrow P_k \Rightarrow P_i$ (en choisissant convenablement l'ordre i, j, k parmi 1, 2 et 3, qui influe parfois spectaculairement sur la difficulté de la démonstration).

b Raisonnement par l'absurde

- Pour montrer, que P est vraie, on peut **supposer** P fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. (On utilise $P \Leftrightarrow \overline{\overline{P}}$.)
 Dans ce cas, on utilise **toujours** une rédaction du type :

Supposons, par l'absurde, que (P fausse),
 :
 Contradiction.

- En particulier, pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut supposer que P **vraie et Q fausse** et en déduire une contradiction. (On utilise la propriété $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow \overline{P \wedge \overline{Q}}$.)
 Dans ce cas, on utilise **toujours** une rédaction du type :

Supposons, par l'absurde que P vraie et Q fausse,
 :
 Contradiction.

Exemples 3

¶1 – Soit p un entier naturel. Montrer que si p^2 est pair, alors p est pair.

On suppose $p \in \mathbb{N}$ et p^2 est pair.

But : p est pair

Supposons, **par l'absurde**, que p est impair. On peut alors trouver un entier k tel que $p = 2k + 1$.

Mais alors $p^2 = 4(k^2 + k) + 1$ n'est pas pair : **contradiction**.

Conclusion : un entier naturel p tel que p^2 est pair est pair.

E2 – Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons, **par l'absurde**, que ce n'est pas le cas. On peut alors trouver $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où la fraction est irréductible.

Mais alors $p^2 = 2q^2$ et donc p est un entier naturel tel que p^2 est pair. D'après ce que l'on a démontré ci-dessus, p est nécessairement pair et on peut trouver un entier k tel que $p = 2k$.

Par suite, $p^2 = 4k^2$ et donc $2q^2 = 4k^2$ puis $q^2 = 2k^2$.

On en déduit que q^2 est pair et donc, toujours avec le résultat précédent, q est pair.

Mais il y a **contradiction** car on ne peut avoir à la fois p pair, q pair et $\frac{p}{q}$ irréductible.

Conclusion : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

C Le raisonnement par contraposée

- Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on peut montrer que $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ (on utilise la propriété

$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)]$) : on **suppose** Q fausse et on essaye de montrer que P est fausse.

Dans ce cas, on rédige **toujours** :

Par contraposée : supposons que (Q fausse)

Montrons que/but (P est fausse)

⋮

Donc (P est fausse).

Exemple 7

Soit x un nombre réel. Montrer que si pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$ alors $x = 0$.

Par **contraposée** : **supposons** que $x \neq 0$.

But : il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x < 0$ ou $x > \varepsilon$.

Il y a deux cas possibles : (raisonnement par **disjonction de cas**)

- soit $x < 0$ et n'importe quel $\varepsilon > 0$ convient,
- soit $x > 0$ (car $x \neq 0$) et on peut poser $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et $x > \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a bien l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x < 0$ ou $x > \varepsilon$.

Conclusion : si pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$ alors $x = 0$.



II Quantificateurs

1 Définitions

Notation 1

Soit $P(x)$ un prédicat dépendant d'un élément x d'un ensemble E fixé.

- **Quantificateur universel** : on note

$$\forall x \in E, P(x)$$

lorsque tous les éléments de E vérifient P .

- **Quantificateur existentiel** : on note

$$\exists x \in E, P(x)$$

lorsqu'il existe (au moins) un élément de E vérifient P ; et

$$\exists! x \in E, P(x)$$

lorsqu'il existe un unique élément de E vérifient P .

Remarques 4

R1 – Le x de la définition est muet : on aurait tout aussi bien pu le noter y, z , etc. On prendra tout de même garde à ne pas prendre une notation déjà utilisée dans le raisonnement.

R2 – On écrit **toujours** le quantificateur **avant** la proposition à quantifier.

R3 – On ne mélange **jamais** quantificateur (et même connecteur logique $\Rightarrow, \Leftrightarrow \dots$) et phrase en français : il est par exemple exclu d'écrire quelque chose du style

$$\ll \forall m, n \in \mathbb{Z}, \text{ la somme de } m \text{ et } n \text{ est un entier.} \gg$$

Il faudra choisir entre

$$\ll \forall m, n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z} \gg$$

et

$$\ll \text{La somme de deux entiers est un entier.} \gg$$

R4 – Lorsque l'on écrit $\forall x \in E, P(x)$, le x n'est défini que dans cette *phrase mathématique*. Pour pouvoir continuer de l'utiliser ensuite, il faut écrire

$$\ll \text{Soit } x \in E. P(x) \text{ est vrai et donc...} \gg$$

De même pour $\exists x \in E, P(x)$:

$$\ll \text{On pose } x \in E \text{ tel } P(x) \text{ est vrai (un tel } x \text{ existe bien). Alors...} \gg$$

R5 – • Pour démontrer

$$\forall x \in E, P(x)$$

on rédige **toujours** :

Soit $x \in E$.
But : $P(x)$ est vrai.
 :

- Pour démontrer

$$\exists x \in E, P(x)$$

c'est en général moins facile, car il s'agit d'exhiber un élément x vérifiant $P(x)$. La rédaction contiendra en général :

Posons $x = \dots$ alors
 :
 donc $P(x)$ est vrai.

- Pour démontrer

$$\exists! x \in E, P(x)$$

il y a deux choses à démontrer

- ★ L'existence d'un élément x de E vérifiant $P(x)$
- ★ L'unicité de cet élément : généralement on suppose qu'on en a deux x_1 et x_2 et on montre que $x_1 = x_2$.

Exemples 4

E1 - $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0,$

E2 - $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \exists! y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x.$

En effet : soit $x \in \mathbb{R}_*^+.$

But : $\exists! y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x$

- **Existence** : $y = \sqrt{x}$ convient.
- **Unicité** : si y_1 et y_2 conviennent, alors $y_1^2 = x = y_2^2$.
 Et donc $y_1^2 - y_2^2 = 0$, c'est-à-dire $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$ et on a donc soit $y_1 = y_2$, soit $y_1 = -y_2$.
 Mais si $y_1 = -y_2$, alors, comme y_1 est un réel positif et $-y_2$ est un réel négatif et qu'ils sont égaux, ils sont nul. Mais on aurait alors $x = 0$ ce qui est exclu car $x \in \mathbb{R}_*^+.$
 C'est donc que $y_1 = y_2$, d'où l'unicité.

On a donc bien $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \exists! y \in \mathbb{R}^+, y^2 = x.$

2 De l'ordre des quantificateurs

⚠ Si l'ordre de deux mêmes quantificateurs n'est pas important

$$\left(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y) \right) \iff \left(\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y) \right)$$

$$\left(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y) \right) \iff \left(\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y) \right)$$

l'ordre de deux quantificateurs différents est important.

**Exemple 8**

« Toute personne a un nom » s'écrit, en notant P l'ensemble des personnes, N l'ensemble des noms et $A(p, n)$ le fait que n soit le nom d'une personne p

$$\forall p \in P, \exists n \in N, A(p, n)$$

Mais

$$\exists n \in N, \forall p \in P, A(p, n)$$

signifie en bon français « Il y a un nom qui soit celui de toute personne. »

Cependant, si

$$\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y) \quad (1)$$

on aura a fortiori

$$\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y). \quad (2)$$

Démonstration 2

En effet, supposons que (1) soit vraie : on a un $x_0 \in E$ tel que $\forall y \in F, P(x_0, y)$.

Soit $y \in F$. But : $\exists x \in E, P(x, y)$.

Il suffit de poser $x = x_0$ qui convient car $P(x_0, y)$ est vrai.

Ainsi, $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$. ■

Remarque 5

Lorsque l'on a un \exists après un \forall , la deuxième variable **dépend** de la première. Dans l'exemple, le nom dépend de la personne.

3

Négation des quantificateurs
Propriété 5

Soit E un ensemble, $P(x)$ un prédicat dépendant d'un élément x de E .

La négation de

$$\forall x \in E, P(x)$$

est

$$\exists x \in E, \text{non}(P(x)).$$

La négation de

$$\exists x \in E, P(x)$$

est

$$\forall x \in E, \text{non}(P(x)).$$

Exemple 9

Par définition, la limite d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est, lorsqu'il existe, le réel ℓ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Le fait que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas ℓ comme limite s'écrit

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon$$

Remarque 6

Ainsi, pour montrer que $(\forall x \in E, P(x))$ est faux, il faut **trouver** un x tel que $P(x)$ soit faux : on dit que x est un **contre-exemple**.

III Principe de récurrence

Le principe de récurrence, à la base du raisonnement par récurrence, dit :

Principe de récurrence

Si $A \subset \mathbb{N}$ tel que

H1 n_0 est le plus petit élément de A

H2 $\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \implies n+1 \in A)$,

alors $A = \llbracket n_0, +\infty \llbracket$.

1 Récurrence simple

Propriété 6

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé.

On suppose que

H1 $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie

H2 Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors $(\mathcal{P}(n) \text{ vraie} \implies \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie})$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarques 5

R1 – La rédaction à adopter pour ce type de raisonnement est très stricte et à respecter absolument :



- 1°) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « ... » définie pour tout entier $n \geq n_0$.
Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ par récurrence sur n .
- 2°) **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;
- 3°) **Hérédité** : Soit **un** $n \geq n_0$ pour lequel $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. (Faire apparaître l'hypothèse de récurrence !)
- 4°) **La récurrence est établie.**
- On a ainsi démontré que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

R2 – Pas de « pour tout n » dans $\mathcal{P}(n)$ sinon le raisonnement est faux !

Exemple 10

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

- 1°) Soit, pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $0 \leq u_n \leq 4$ ».
Montrons, par récurrence sur n , que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2°) **Initialisation** : $u_0 = 0$ donc, en particulier, $0 \leq u_0 \leq 4$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie ;
- 3°) **Hérédité** : supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour **un** $n \geq 0$. On a

$$0 \leq u_n \leq 4 \quad (\text{HR})$$

But : $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Or $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ et (HR) nous donne que

$$4 \leq 3u_n + 4 \leq 16$$

et, par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur \mathbb{R}^+ ,

$$2 \leq \sqrt{3u_n + 4} \leq 4$$

donc, en particulier,

$$0 \leq u_{n+1} \leq 4$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- 4°) **La récurrence est établie.**

On a ainsi démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

Remarque 7

L'initialisation est très importante : par exemple la propriété « $n+1 = n$ » est héréditaire sur \mathbb{N} , mais ne peut être initialisée (et pour cause !!!)

2 Récurrence à pas fixé

Propriété 7 : Récurrence d'ordre p

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé, et $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On suppose que

H1 $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n_0 + p - 1)$ sont vraies (p initialisations)

H2 Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors $\mathcal{P}(n), \dots, \mathcal{P}(n + p - 1)$ vraies $\implies \mathcal{P}(n + p)$ vraie (p hypothèses)

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration 3

On prouve par récurrence simple $\mathcal{Q}(n) : \ll \mathcal{P}(n), \dots, \mathcal{P}(n + p - 1) \text{ vraies} \gg$ vrai pour $n \geq n_0$. ■

Remarque 8

La rédaction à adopter pour ce type de raisonnement est très stricte et à respecter absolument :

- 1°) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « ... » définie pour tout entier $n \geq n_0$.
Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ par récurrence d'ordre p sur n .
- 2°) **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n_0 + p - 1)$ sont vraies ;
- 3°) **Hérédité** : Soit **un** $n \geq n_0$ pour lequel $\mathcal{P}(n), \dots, \mathcal{P}(n + p - 1)$
Montrons que $\mathcal{P}(n + p)$ est vraie. (Faire apparaître l'hypothèse de récurrence !)
- 4°) **La récurrence est établie.**
On a ainsi démontré que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 11

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 0, u_1 = -1, u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n - 1) + (-1)^n$.

- 1°) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $u_n = (n - 1) + (-1)^n$ » définie pour tout entier $n \geq 0$.
Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ par récurrence d'ordre 3 sur n .
- 2°) **Initialisation** : Comme on a $u_0 = 0 = -1 + (-1)^0, u_1 = -1 = 1 - 1 + (-1)^1$ et $u_2 = 2 = 2 - 1 + (-1)^2, \mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies (3 initialisations) ;
- 3°) **Hérédité** : Soit **un** $n \geq n_0$ pour lequel $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n + 1)$ et $\mathcal{P}(n + 2)$ sont vraies.
Montrons que $\mathcal{P}(n + 3)$ est vraie.



D'après la relation de récurrence définissant $(u_n)_n$,

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= (n+1) + (-1)^{n+2} + n + (-1)^{n+1} - (n-1) - (-1)^n \\ &= n+2 + (-1)^n((-1)^2 + (-1) - 1) \\ &= n+2 + (-1)^n(-1) \\ &= n+2 + (-1)^{n+3}. \end{aligned}$$

4°) La récurrence est établie.

On a ainsi démontré que $\forall n \geq 0, u_n = (n-1) + (-1)^n$.

3 Récurrence forte

Propriété 8

Soit $\mathcal{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geq n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé.

On suppose que

H1 $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie

H2 Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, alors $\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ vraie $\implies \mathcal{P}(n+1)$ vraie

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration 4

On prouve par récurrence simple $\mathcal{Q}(n) : \ll \forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k) \text{ est vraie} \gg$ vrai pour $n \geq n_0$. ■

Remarques 6

R1 – Parfois, plusieurs initialisations sont nécessaires!

R2 – La rédaction à adopter pour ce type de raisonnement est également très stricte et à respecter absolument :

1°) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « ... » définie pour tout entier $n \geq n_0$.

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ par récurrence forte sur n .

2°) **Initialisation** : $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ;

3°) **Hérédité** : supposons que pour **un** $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket n_0, n \rrbracket$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. (Faire apparaître l'hypothèse de récurrence !)

4°) La récurrence est établie.

On a ainsi démontré que $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple 12

Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $\exists (k, q) \in \mathbb{N}^2$, $n = 2^k(2q + 1)$.

1°) Soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion « $\exists (k, q) \in \mathbb{N}$, $n = 2^k(2q + 1)$ » définie pour tout entier $n \geq 1$.

Montrons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ par récurrence forte sur n .

2°) **Initialisation** : pour $n = 1$, $k = q = 0$ conviennent ;

3°) **Hérédité** : Soit **un** $n \geq 1$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Deux cas sont possibles :

- Soit $n+1$ est impair, et alors on peut trouver $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2q+1 = 2^0(2q+1)$ ce qui donne $\mathcal{P}(n+1)$.
- Soit $n+1$ est pair et on peut alors trouver $m \in \mathbb{N}$, $m < n+1$ tel que $n+1 = 2m$. Mais alors $m \leq n$ donc par (3), on a $(k, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m = 2^k(2q+1)$ ce qui donne $n+1 = 2^{k+1}(2q+1)$ et qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$.

4°) La récurrence est établie.

On a ainsi démontré que $\forall n \geq 1, \exists (k, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^k(2q+1)$.