1

Quantificateurs, Logique, Raisonnements

I Éléments de logique

1 Assertions

On rencontre en mathématiques (plus précisément en logique mathématique) des *phrases* appelées **assertions**, **énoncés** ou **propositions** que l'on ne définira pas formellement : on retiendra simplement qu'elles peuvent être soit vraies (V) soit fausses (F) (mais pas les deux simultanément).

Certaines de ces assertions sont posées comme vraies par convention : on parle d'**axiomes**.

D'autres sont démontrées comme étant vraies : on parle de **théorème** ou de **propriété** (ou encore de **proposition**, attention...)

Le but du mathématicien est de formuler des assertions (à ce stade on parle de **conjecture**), puis de démontrer leur véracité à partir d'autres résultats démontrés.

Une ***table de vérité*** est un tableau qui indique si une formule $P(A, B, C, \dots)$ (appelée **prédicat** : assertion dépendant de paramètres), construite à partir d'assertions $A, B, C, \dots$, est vraie ou fausse suivant la véracité de $A, B, C, \dots$

2 Connecteurs logiques

a Négation

Définition 1 : Négation

Soit P une assertion.

On définit la **négation** « $\text{non}\,P$ » de P, notée $\overline{P}$ ou $\neg P$, comme étant l'assertion fausse lorsque P est vraie et vraie lorsque P est fausse.

P	$\text{non}\,P$
V	F
F	V

Table 1.1 – Table de vérité de la négation.

b Conjonction et disjonction

Définition 2 : Conjonction et disjonction

Soient P et Q deux assertions.

On définit la ***conjonction*** « P et Q » des assertions P et Q, notée $P \wedge Q$, comme étant l'assertion vraie lorsque les deux assertions P et Q sont vraies, fausse sinon.

On définit la ***disjonction*** « P ou Q » des assertions P et Q, notée $P \vee Q$, comme étant l'assertion vraie lorsque l'une au moins des assertions P et Q est vraie, fausse sinon.

P	Q	P et Q	P ou Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Table 1.2 – Table de vérité de la disjonction et la conjonction.

c Implication

Définition 3 : Implication

Étant donné des assertions P et Q, l'***implication***, notée $P \Longrightarrow Q$ et lue « P implique Q » est l'assertion « Si P est vraie, Q est vraie » :

- vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P est fausse,
- fausse sinon.

Il s'agit de l'assertion $\overline{P} \vee Q$ (c'est-à-dire $(\text{non}\, P)$ ou $Q)$).

P est appelé l'***hypothèse*** de l'implication, et Q sa ***conclusion***.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table 1.3 – Table de vérité de l'implication.

Propriété 1

Dire que $P \not\Longrightarrow Q$, c'est dire que P est vraie et pourtant Q est fausse.

Autrement dit, la négation de $P \Longrightarrow Q$ est $P \wedge \overline{Q}$ (c'est-à-dire P et $(\text{non}\, Q)$).

Propriété 2

Soient P et Q des assertions.

Dire que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, c'est dire que :

- *« Pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie »* (**Condition nécessaire**),
- *« Pour que Q soit vraie, il suffit que P soit vraie »* (**Condition suffisante**).

Définition 4 : Implication réciproque

Soient P et Q deux assertions.

L'implication $Q \Longrightarrow P$ est appelée ***implication réciproque*** de $P \Longrightarrow Q$

d Équivalence

Définition 5 : Équivalence

Étant donné des assertions P et Q, l'***équivalence***, notée $P \Longleftrightarrow Q$ et lue « P est équivalent à Q » est l'assertion $(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$.

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table 1.4 – Table de vérité de l'équivalence.

Propriété 3

Soient P et Q des assertions.

« $P \Longleftrightarrow Q$ » est synonyme des trois assertions suivantes :

- *« P et Q sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses »,*
- *« P est vraie si et seulement si Q est vraie »,*
- *« Pour que P soit vraie, il faut et il suffit que Q soit vraie »* (**Condition nécessaire et suffisante** ou **Caractérisation**).

3 Propriétés

Propriété 4

Soient P, Q, R des assertions.

(i) $\overline{\overline{P}} \iff P$

(ii) Lois de Morgan :

$$\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff [(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)]$$

$$\text{non}(P \text{ et } Q) \iff [(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)]$$

(iii) Distributivités :

$$[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \iff [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$$

$$[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \iff [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$$

(iv) Rappel : $[P \Longrightarrow Q] \iff [(\text{non } P) \text{ ou } Q]$

(v) L'implication $\big((P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow R)\big) \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ *est (toujours) vraie.*

(vi) Rappel :

$$\text{non}(P \Longrightarrow Q) \iff [P \text{ et } (\text{non } Q)]$$

(à la base du raisonnement par ***l'absurde****)*

(vii) $[P \Longrightarrow Q] \iff [(\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)]$
(à la base du raisonnement par ***contraposée****)*

(viii) $[P \iff Q] \iff [(\text{non } P) \iff (\text{non } Q)]$

4 Méthodes de démonstration

a Raisonnements directs

- Pour démontrer une assertion, on peut bien sûr le faire directement en la déduisant d'un résultat connu.
- Pour démontrer que P ou Q est vraie, on peut aussi supposer P est fausse et montrer que dans ce cas Q est vraie. (En effet, $((\text{non } P) \Longrightarrow Q) \iff (P \text{ ou } Q)$.)
- Pour démontrer directement $P \Longrightarrow Q$, on **suppose** P vraie et on essaye de montrer que Q est vraie.
  Dans ce cas, on rédige **toujours** :

> Supposons que (P vraie).
> Montrons que/but (Q est vraie).
> ⋮
> Donc (Q est vraie).

- Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$ est fausse, il suffit de (et il faut) démontrer que P est vraie et pourtant Q est fausse.
  (En effet, $\text{non}(P \Longrightarrow Q) \iff P \text{ et non } Q$.)
- Pour montrer que $P \iff Q$, on procède généralement de l'une des manière suivantes :
  - ⋆ soit on démontre $P \Longrightarrow Q$ puis $Q \Longrightarrow P$,
  - ⋆ soit on démontre

    $$P \iff P_1 \iff P_2 \iff \cdots \iff P_n \iff Q$$

    où $P_1, \dots P_n$ sont des assertions intermédiaires.
- Pour montrer une suite d'équivalences du type $P_1 \iff P_2 \iff P_3$, il suffit de montrer $P_i \Longrightarrow P_j$ puis $P_j \Longrightarrow P_k$ et enfin $P_k \Longrightarrow P_i$ — c'est-à-dire $P_i \Longrightarrow P_j \Longrightarrow P_k \Longrightarrow P_i$ (en choisissant convenablement l'ordre i, j, k parmi $1, 2$ et 3, qui influe parfois spectaculairement sur la difficulté de la démonstration).

b Raisonnement par l'absurde

- Pour montrer, que P est vraie, on peut **supposer** P fausse et essayer d'aboutir à une contradiction. (On utilise $P \iff \overline{\overline{P}}$.)
  Dans ce cas, on utilise **toujours** une rédaction du type :

> Supposons, par l'absurde, que (P fausse),
> ⋮
> Contradiction.

- En particulier, pour montrer que $P \implies Q$, on peut supposer que P **vraie et** Q **fausse** et en déduire une contradiction.
  (On utilise la propriété $[P \implies Q] \iff \overline{P \wedge \overline{Q}}$.)
  Dans ce cas, on utilise **toujours** une rédaction du type :

> Supposons, par l'absurde que P vraie et Q fausse,
> ⋮
> Contradiction.

C Le raisonnement par contraposée

- Pour montrer que $P \implies Q$, on peut montrer que $(\text{non}\, Q) \implies (\text{non}\, P)$ (on utilise la propriété $[P \implies Q] \iff [(\text{non}\, Q) \implies (\text{non}\, P)]$) : on **suppose** Q fausse et on essaye de montrer que P est fausse.
  Dans ce cas, on rédige **toujours** :

> Par contraposée : supposons que (Q fausse)
> Montrons que/but (P est fausse)
> ⋮
> Donc (P est fausse).

II Quantificateurs

1 Définitions

Notation 1

Soit $P(x)$ un prédicat dépendant d'un élément x d'un ensemble E fixé.

- ***Quantificateur universel*** : on note
  $$\forall\, x \in E,\quad P(x)$$
  lorsque tous les éléments de E vérifient P.
- ***Quantificateur existentiel*** : on note
  $$\exists\, x \in E,\quad P(x)$$
  lorsqu'il existe (au moins) un élément de E vérifient P ; et
  $$\exists!\, x \in E,\quad P(x)$$
  lorsqu'il existe un unique élément de E vérifient P.

2 De l'ordre des quantificateurs

⚠ Si l'ordre de deux mêmes quantificateurs n'est pas important

$$\left(\forall x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x,y)\right) \iff \left(\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ P(x,y)\right)$$

$$\left(\exists x \in E,\ \exists y \in F,\ P(x,y)\right) \iff \left(\exists y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x,y)\right)$$

l'ordre de deux quantificateurs différents est important.

Cependant, si

$$\exists\, x \in E,\quad \forall\, y \in F,\quad P(x,y) \tag{1}$$

on aura a fortiori

$$\forall\, y \in F,\quad \exists\, x \in E,\quad P(x,y). \tag{2}$$

3 Négation des quantificateurs

Propriété 5

Soit E un ensemble, $P(x)$ un prédicat dépendant d'un élément x de E.

La négation de $\forall x \in E, \quad P(x)$ est $\exists x \in E, \quad \text{non}(P(x))$.

La négation de $\exists x \in E, \quad P(x)$ est $\forall x \in E, \quad \text{non}(P(x))$.

III Principe de récurrence

Le principe de récurrence, à la base du raisonnement par récurrence, dit :

Principe de récurrence

Si $A \subset \mathbb{N}$ tel que

H1 n_0 est le plus petit élément de A

H2 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \in A \Longrightarrow n+1 \in A)$,

alors $A = [\![n_0, +\infty[\![$.

1 Récurrence simple

Propriété 6

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geqslant n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé.

On suppose que

H1 *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie*

H2 *Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, alors ($\mathscr{P}(n)$ vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ vraie)*

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

2 Récurrence à pas fixé

Propriété 7 : Récurrence d'ordre p

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geqslant n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé, et $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.

On suppose que

H1 *$\mathscr{P}(n_0), \dots, \mathscr{P}(n_0+p-1)$ sont vraies (p initialisations)*

H2 *Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, alors*

$$\mathscr{P}(n), \dots, \mathscr{P}(n+p-1) \text{ vraies} \Longrightarrow \mathscr{P}(n+p) \text{ vraie}$$

(p hypothèses)

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

3 Récurrence forte

Propriété 8

Soit $\mathscr{P}(n)$ une assertion définie pour un entier $n \geqslant n_0$ quelconque où n_0 est un entier fixé.

On suppose que

H1 *$\mathscr{P}(n_0)$ est vraie*

H2 *Si $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, alors $\forall k \in [\![n_0, n]\!]$,*

$$\mathscr{P}(k) \text{ vraie} \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1) \text{ vraie}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.