Chapitre II

Les Ensembles

Extrait du programme officiel :

Le programme se limite strictement aux notions de base figurant ci-dessous. Toute étude systématique de la théorie des ensembles est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Ensembles	
Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

Table des matières

I Ensemble

Nous nous contenterons d'une définition intuitive de la notion d'ensemble :

Définition : Ensemble

On appelle ***ensemble*** toute collection non ordonnée d'objets, appelés ***éléments*** de l'ensemble. Pour désigner un ensemble, on note ses éléments entre accolades.

Exemples

E 1 – $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$

E 2 – $\{0, 1, 2\} = \{0, 2, 1\}$

E 3 – $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$

Notation

Soit E un ensemble.

- Lorsque x est un élément de E, on dit qu'il ***appartient*** à l'ensemble E et on note $x \in E$.
- Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.
- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé ***ensemble vide***, noté $\varnothing$
- Un ensemble contenant un seul élément est appelé un ***singleton***.
- Un ensemble contenant deux éléments est appelé une ***paire***.
- Si I est un ensemble (ensemble d'***indices***) et pour tout $i \in I$, x_i un élément de E, $\{x_i,\ i \in I\}$ désigne l'ensemble de tous les x_i. Par exemple, $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- Si E est un ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, E^* représente les éléments non nuls de E, E^+ et $E^*_+ = E^+_*$ représentent respectivement les éléments positifs (ou nuls) de E et les élément strictement positifs de E. On obtient l'analogue avec les éléments négatifs en remplaçant le $+$ par un $-$.

Remarques

R 1 – Si $P(x)$ est une assertion dépendant d'un élément x d'un ensemble E donné, on note $\{x \in E,\ P(x)\}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ soit vrai. Ainsi, dire que $y \notin \{x \in E,\ P(x)\}$, c'est dire que soit $y \notin E$, soit $P(y)$ est faux.

R 2 – Si $\forall x \in E,\ P(x)$, alors $\{x \in E,\ P(x)\} = E$.

Si $\exists x \in E,\ P(x)$, alors $\{x \in E,\ P(x)\} \neq \varnothing$.

Si $\exists! x \in E,\ P(x)$, alors $\{x \in E,\ P(x)\}$ est un singleton.

Exemples

E 1 – $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$

E 2 – $\{x \in \mathbb{R},\ x \text{ est un entier pair}\} = 2\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers pairs.

E 3 – $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(1) = 0\}$ est l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle s'annulant en 1.

II Inclusion et égalité

Définition : Inclusion

Soient A et E deux ensembles.

On dit que A ***est inclus dans*** E (ou ***est une partie de*** E), et on note $A \subset E$ lorsque tous les éléments de A sont des éléments de E, i.e. si $x \in A$, alors $x \in E$

On note $A \not\subset E$ lorsque ce n'est pas le cas.

Par convention, on a toujours $\varnothing \subset E$.

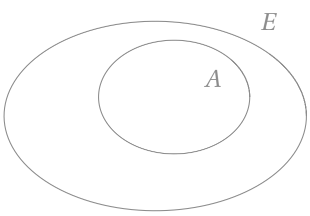


Figure 1 – Inclusion

Remarques

R 1 – Dire que $x \in E$, c'est dire que $\{x\} \subset E$.

R 2 – Ce n'est pas parce que l'on n'a pas $A \not\subset E$ que l'on a $E \subset A$. Par exemple : $\{1,4\} \not\subset \{1,3\}$ et $\{1,3\} \not\subset \{1,4\}$.

R 3 – $A \not\subset E$ lorsqu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin E$.

R 4 – Pour démontrer que $A \subset E$, on utilise la rédaction suivante :

Soit $x \in A$. But : $x \in E$...

Définition : Égalité ensembliste

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A et B sont ***égaux*** et on note $A = B$ lorsque tous les éléments de l'un sont aussi dans l'autre, i.e. $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarques

R 1 – Ainsi dire que $A \neq B$, c'est dire que soit il y a un élément de A qui n'est pas dans B, soit il y a un élément de B qui n'est pas dans A.

R 2 – Pour montrer que $A = B$, on raisonnera de l'une des manières suivantes :
- Double inclusion : 1. Montrons que $A \subset B$.
  2. Montrons que $B \subset A$.
- $x \in A \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow x \in B$.

⚠On ne raisonne **jamais** par égalité d'ensemble $A = \cdots = B$ car on a tendance à voir les égalités comme des inclusions.

III Ensemble des parties d'un ensemble

Définition : Ensemble des parties

Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Remarques

R 1 – $\mathscr{P}(E)$ est donc un ensemble dont les éléments sont eux-même des ensembles.

R 2 – On a toujours $E \subset E$ et $\varnothing \subset E$ donc $E \in \mathscr{P}(E)$ et $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$.

R 3 – $x \in E \Longleftrightarrow \{x\} \in \mathscr{P}(E)$.

R 4 – $A \subset E \Longleftrightarrow A \in \mathscr{P}(E)$.

Exemples

E 1 – Si $E = \{1\}$ (un élément), $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}\}$ (2 élements).

E 2 – Si $E = \{1, 2\}$ (deux éléments), $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ (4 élements).

E 3 – Si $E = \{1, 2, 3\}$ (trois éléments), $\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ (8 élements).

E 4 – $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})) = ?$

Remarque

La limite de la théorie des ensembles : on ne peut pas parler de l'ensemble $\mathfrak{P}$ de tous les ensembles. Sinon, on pourrait considérer $\mathfrak{E} = \{E \text{ ensemble} \mid E \notin E\} \subset \mathfrak{P}$ qui est paradoxal : on n'a ni $\mathfrak{E} \in \mathfrak{E}$, ni $\mathfrak{E} \notin \mathfrak{E}$. C'est le paradoxe de Russel[1].

IV Opérations sur les ensembles

Définition : Opérations sur les ensembles

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E.

- On appelle ***complémentaire*** de A dans E, noté $\overline{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des éléments x de E tel que $x \notin A$.
- On appelle ***différence*** A ***moins*** B ou A ***privée de*** B, notée $A - B$ ou $A \setminus B$, l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in A$ mais $x \notin B$.
- On appelle ***réunion*** de A et de B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in A$ ou $x \in B$ (ou les deux).
- On appelle ***intersection***, notée $A \cap B$, de A et de B l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B$.

Exemple

Si E est un ensemble, A, B des parties de E,

- $\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$.
- $A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
- $A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- $A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$.

Remarques

R 1 – Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont ***disjoints***. Leur réunion se note alors $A \sqcup B$ ou $A \underset{\neq}{\cup} B$ et on parle d'***union disjointe***.

R 2 – On a toujours $A \cap B \subset A \subset B$ (et bien sûr la même chose pour B.

On peut généraliser ces deux dernières définitions à plus de deux ensembles :

Définition

Soient E un ensemble, I un ensemble (d'indices) et pour tout $i \in I$, A_i une partie de E, on définit alors

- $\bigcup_{i \in I} A_i$ comme l'ensemble des $x \in E$ tels que x appartient à au moins un A_i.
- $\bigcap_{i \in I} A_i$ comme l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \in A_i$ pour tout $i \in I$.

Remarque

Le cas où I contient deux éléments nous redonne bien la définition donnée ci-dessus.

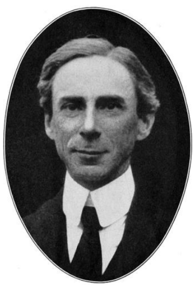
Exemples

E 1 – $[1,3[\cap]2,4[\cap]1,7] = ?$ (Réponse : $]2,3[$.)

E 2 – $[1,2] \cup \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup]-1,1] = ?$ (Réponse : $]-1,2]$.)

E 3 – Calculer $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. (Réponse : $]-1,1[$, par double inclusion.)

---

1.  **Bertrand Arthur William Russel** (1872 - 1970) est un est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique. Son œuvre, qui comprend également des romans et des nouvelles, fut couronnée par le prix Nobel de littérature en 1950, en particulier pour son engagement humaniste et comme libre penseur.

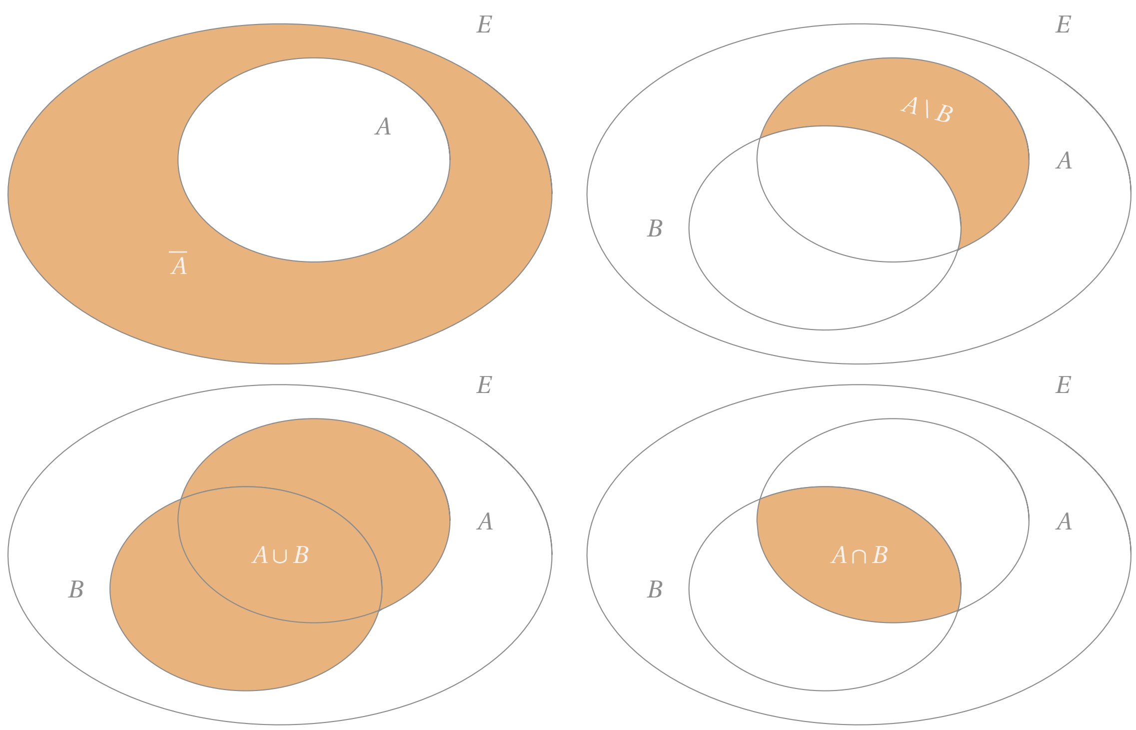


Figure 2 – Opérations sur les ensembles

E4 – Calculer $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} [x, x+1[$. (Réponse : $\mathbb{R}$, par double inclusion.)

Propriétés

Soit E un ensemble, A, B, C des parties de E.

(i) ***Commutativité de $\cup$ et $\cap$:***

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

(ii) ***Associativité de $\cup$ et $\cap$:***

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(iii) ***Eléments neutres : $\varnothing$ pour $\cup$ et E pour $\cap$***

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A \qquad A \cap E = E \cap A = A$$

(iv) ***Distributivité de $\cup$ sur $\cap$ et de $\cap$ sur $\cup$:***

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(v) ***Complémentaire involutif :*** $\overline{\overline{A}} = A$

(vi) ***Lois de De Morgan :*** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(vii) $B \setminus A = B \cap \overline{A}$

Démonstration

Correspondent aux propriétés identiques pour le *ou*, le *et* et le *non* logique. □

V Familles indexées et produit cartésien

Définition : Famille indexée

Si I est un ensemble (ensemble d'***indices***) et pour tout $i \in I$, E_i un ensemble et x_i un élément de E_i, $(x_i)_{i\in I}$ désigne la ***famille*** des x_i ***indexée*** par I.

L'ordre est important : si $(y_i)_{i\in I}$ est une autre famille d'éléments des E_i indexée par I, dire que $(x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$ c'est, par définition, dire que pour tout $i \in I$, $x_i = y_i$.

Remarques

R 1 – Si $I = \mathbb{N}$ on parle de ***suite***.

R 2 – Si I contient deux éléments, on parle de ***couple*** : par exemple (x_1, x_2) pour $I = \{1, 2\}$.

R 3 – Si I contient trois éléments, on parle de ***triplet*** : par exemple (x_1, x_2, x_3) pour $I = \{1, 2, 3\}$.

R 4 – Si I contient n éléments, on parle de ***n-uplet*** : par exemple $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemple

$(1,2,3) \neq (1,3,2)$

Définition : Produit cartésien

- Si, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des ensembles, on appelle ***produit cartésien*** des E_i, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$.

$$\begin{aligned} &E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \\ &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \cdots, x_n \in E_n\}. \end{aligned}$$

- Plus généralement, si I est un ensemble et pour tout $i \in I$, E_i est un ensemble, on appelle ***produit cartésien*** des E_i, noté $\prod\limits_{i\in I} E_i$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ indexées par I tels que pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.

Remarques

R 1 – $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

R 2 – Pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}}$ est noté E^n.

R 3 – Si I est un ensemble, $\prod\limits_{i\in I} E$ est noté $E^I = \{(x_i)_{i\in I} \mid \forall\, i \in I,\ \ x_i \in E\}$.

Exemples

E 1 – $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

E 2 – Si on note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle, $\mathbb{N} \times \mathscr{F} \times \mathbb{C}$ est l'ensemble des triplets (n, f, z) où $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{F}$ et $z \in \mathbb{C}$.

E 3 – $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ x_n \in \mathbb{R}\right\}$ est l'ensemble des suites réelles.

VI Recouvrements disjoints, partitions

Définition : Recouvrement disjoint, Partition

Soit $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties d'un ensemble E.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement disjoint** de E lorsque $E = \bigsqcup_{i\in I} A_i$,

ie

- $E = \bigcup_{i\in I} A_i$
- $\forall\, i \neq j,\quad A_i \cap A_j = \varnothing,$

ie tout élément de E est dans un et un seul A_i.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition** de E lorsque c'est un recouvrement disjoint de E et, de plus, tous les A_i sont non vides.

Exemples

E 1 – $(2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1)$ partition de $\mathbb{Z}$ (et aussi un recouvrement disjoint de $\mathbb{Z}$).

E 2 – $\big([k, k+1[\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ partition de $\mathbb{R}$ mais ni $\big([k, k+1]\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, ni $\big(]k, k+1[\big)_{k\in\mathbb{Z}}$.