Chapitre II

Les Ensembles

I Ensemble

Nous nous contenterons d'une définition intuitive de la notion d'ensemble :

Définition : Ensemble

On appelle ***ensemble*** toute collection non ordonnée d'objets, appelés ***éléments*** de l'ensemble.

Pour désigner un ensemble, on note ses éléments entre accolades.

Notation

Soit E un ensemble.

- Lorsque x est un élément de E, on dit qu'il ***appartient*** à l'ensemble E et on note $x \in E$.
- Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.
- L'ensemble ne contenant aucun élément est appelé ***ensemble vide***, noté $\varnothing$
- Un ensemble contenant un seul élément est appelé un ***singleton***.
- Un ensemble contenant deux éléments est appelé une ***paire***.
- Si I est un ensemble (ensemble d'***indices***) et pour tout $i \in I$, x_i un élément de E, $\{x_i,\ i \in I\}$ désigne l'ensemble de tous les x_i. Par exemple, $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- Si E est un ensemble parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, E^* représente les éléments non nuls de E, E^+ et $E^*_+ = E^+_*$ représentent respectivement les éléments positifs (ou nuls) de E et les élément strictement positifs de E. On obtient l'analogue avec les éléments négatifs en remplaçant le $+$ par un $-$.

II Inclusion et égalité

Définition : Inclusion

Soient A et E deux ensembles.

On dit que A ***est inclus dans*** E (ou ***est une partie de*** E), et on note $A \subset E$ lorsque tous les éléments de A sont des éléments de E, i.e. si $x \in A$, alors $x \in E$

On note $A \not\subset E$ lorsque ce n'est pas le cas.

Par convention, on a toujours $\varnothing \subset E$.

Définition : Égalité ensembliste

Soient A et B deux ensembles.

On dit que A et B sont ***égaux*** et on note $A = B$ lorsque tous les éléments de l'un sont aussi dans l'autre, i.e. $A \subset B$ et $B \subset A$.

III Ensemble des parties d'un ensemble

Définition : Ensemble des parties

Soit E un ensemble. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

IV Opérations sur les ensembles

Définition : Opérations sur les ensembles

Soient E un ensemble, A et B deux parties de E.

- On appelle ***complémentaire*** de A dans E, noté $\overline{A}$ ou A^c lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des éléments x de E tel que $x \notin A$.
- On appelle ***différence*** A ***moins*** B ou A ***privée de*** B, notée $A - B$ ou $A \setminus B$, l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in A$ mais $x \notin B$.
- On appelle ***réunion*** de A et de B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in A$ ou $x \in B$ (ou les deux).
- On appelle ***intersection***, notée $A \cap B$, de A et de B l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in A$ et $x \in B$.

On peut généraliser ces deux dernières définitions à plus de deux ensembles :

Définition

Soient E un ensemble, I un ensemble (d'indices) et pour tout $i \in I$, A_i une partie de E, on définit alors

- $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ comme l'ensemble des $x \in E$ tels que x appartient à au moins un A_i.
- $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ comme l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \in A_i$ pour tout $i \in I$.

Propriétés

Soit E un ensemble, A,B,C des parties de E.

(i) ***Commutativité de $\cup$ et $\cap$:***

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$

(ii) ***Associativité de $\cup$ et $\cap$:***

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(iii) ***Eléments neutres : $\varnothing$ pour $\cup$ et E pour $\cap$***

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$

$$A \cap E = E \cap A = A$$

(iv) ***Distributivité de $\cup$ sur $\cap$ et de $\cap$ sur $\cup$:***

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(v) ***Complémentaire involutif :*** $\overline{\overline{A}} = A$

(vi) ***Lois de De Morgan :*** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(vii) $B \setminus A = B \cap \overline{A}$

V Familles indexées et produit cartésien

Définition : Famille indexée

Si I est un ensemble (ensemble d'***indices***) et pour tout $i \in I$, E_i un ensemble et x_i un élément de E_i, $(x_i)_{i \in I}$ désigne la ***famille*** des x_i ***indexée*** par I.

L'ordre est important : si $(y_i)_{i \in I}$ est une autre famille d'éléments des E_i indexée par I, dire que $(x_i)_{i \in I} = (y_i)_{i \in I}$ c'est, par définition, dire que pour tout $i \in I$, $x_i = y_i$.

Définition : Produit cartésien

- Si, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles, on appelle ***produit cartésien*** des E_i, noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$.

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \cdots, x_n \in E_n\}.$$

- Plus généralement, si I est un ensemble et pour tout $i \in I$, E_i est un ensemble, on appelle ***produit cartésien*** des E_i, noté $\prod_{i \in I} E_i$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ indexées par I tels que pour tout $i \in I$, $x_i \in E_i$.

VI Recouvrements disjoints, partitions

Définition : Recouvrement disjoint, Partition

Soit $(A_i)_{i \in I}$ famille de parties d'un ensemble E.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement disjoint** de E lorsque $E = \bigsqcup_{i \in I} A_i$,

ie

- $E = \bigcup_{i \in I} A_i$
- $\forall\, i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \varnothing$,

ie tout élément de E est dans un et un seul A_i.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une **partition** de E lorsque c'est un recouvrement disjoint de E et, de plus, tous les A_i sont non vides.