

## chapitre III

## Compléments de calcul algébrique

Extrait du programme officiel :

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme;
- résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot;
- manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations;

## Contenus

## Capacités &amp; commentaires

## a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Notations  $\sum_{i \in I} a_i$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i$ ,  $\prod_{i \in I} a_i$ ,  $\prod_{i=1}^n a_i$ . Cas où  $I$  est vide.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Expressions simplifiées de  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k$ .

Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ .

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Exemples de sommes triangulaires.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Convention  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k < 0$  et  $k > n$ .

Formule du binôme dans  $\mathbb{R}$ .

## b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans  $\mathbb{R}^2$ , de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.

Notations  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

## c) Inégalités

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

Dans  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant; maximum, minimum.

Partie entière d'un nombre réel.

Notation  $\lfloor x \rfloor$ .



# Table des matières

## III Compléments de calcul algébrique

<b>I</b>	<b>Inégalités dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>2</b>
1	Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ . . . . .	2
2	Valeur absolue . . . . .	2
3	Intervalles . . . . .	3
4	Majorant, minorant, minimum, maximum . . . . .	3
5	Partie entière . . . . .	4
<b>II</b>	<b>Sommations, produits</b>	<b>5</b>
1	Notations . . . . .	5
2	Propriétés . . . . .	5
3	Changement d'indice . . . . .	6
4	Simplifications télescopiques . . . . .	6
5	Quelques formules à (très) bien connaître . . . . .	7
6	Sommes doubles . . . . .	9
7	Produits de sommes . . . . .	11
<b>III</b>	<b>Coefficients binomiaux et formule du binôme</b>	<b>12</b>
1	Définition . . . . .	12
2	Propriétés usuelles . . . . .	12
3	Formule du binôme de Newton . . . . .	14
<b>IV</b>	<b>Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss</b>	<b>15</b>
1	Définition . . . . .	15
2	Opérations élémentaires . . . . .	15
3	Méthode du pivot de Gauss . . . . .	16
4	Exemple de résolution de système linéaire à paramètre . . . . .	18

## I Inégalités dans $\mathbb{R}$

### 1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Nous disposons sur  $\mathbb{R}$  de la relation  $\leq$  appelée relation d'ordre, permettant de comparer deux nombres réels. Elle a le bon goût d'être compatible avec les opérations :

#### Propriété

Pour tous  $x, y, u \in \mathbb{R}$ ,

$$x \leq y \implies x + u \leq y + u.$$

Si, de plus,  $0 \leq u$ ,

$$x \leq y \implies xu \leq yu.$$

#### Remarques

**R1** – En particulier, si  $x \leq y$  et  $u \leq v$ , alors  $x + u \leq y + v$ . (car  $x + u \leq y + u \leq y + v$ .)

**R2** – De même, si  $0 \leq x \leq y$  et  $0 \leq u \leq v$ ,  $xu \leq yv$ .

**R3** – Mais attention, on ne peut pas soustraire deux inégalités :  $1 \leq 2$  et  $3 \leq 4$ , mais  $1 - 2 = -1 > 2 - 4 = -2$ .

**R4** – Si  $x \leq y$ ,  $-y \leq -x$  (pourquoi ?) et plus généralement si  $u \leq 0$ ,  $uy \leq ux$ .

**R5** – Si  $0 < x \leq y$  ou  $x \leq y < 0$ ,  $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$  (pourquoi ?), mais si  $x < 0 < y$ ,  $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$  (pourquoi ?).

**R6** – On ne peut pas quotienter deux inégalités :  $1 \leq 2$  et  $2 \leq 5$ , mais  $\frac{1}{2} > \frac{2}{5}$ .

## 2 Valeur absolue

### Définition : Valeur absolue

On appelle **valeur absolue** d'un réel  $x$ , le réel  $|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$

### Propriétés

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$(i) \quad |xy| = |x||y| \text{ et si } y \neq 0, \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$(iii) \quad \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$(ii) \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|.$$

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

### Remarque

$|x - a|$  s'interprète sur la droite réelle comme la distance entre  $x$  et  $a$ . Donc  $|x - a| \leq b$  est équivalent à  $a - b \leq x \leq a + b$ .

### Propriété

Soit  $x$  et  $M$  deux réels avec  $M \geq 0$ .

$$(i) \quad |x| \leq M \text{ si et seulement si } -M \leq x \leq M$$

$$(ii) \quad |x| \geq M \text{ si et seulement si } x \leq -M \text{ ou } x \geq M$$

(On a les relations similaires en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.)

### Propriété : Inégalité triangulaire

Soient  $x$  et  $y$  deux nombres réels.

Alors

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

**Cas d'égalité :**

$$|x + y| = |x| + |y| \iff x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$$

## 3 Intervalles

### Définition

Il y a neuf types d'intervalles réels :

- Les fermés non bornés :  $[a, +\infty[$ ,  $] -\infty, b]$
- Les ouverts non bornés :  $]a, +\infty[$ ,  $] -\infty, b[$
- L'ouvert-fermé non borné :  $\mathbb{R} = ] -\infty, +\infty[$
- Les segments = fermés-bornés :  $[a, b]$
- Les ouverts bornés :  $]a, b[$  (en particulier  $\emptyset$ )
- Les semi-ouverts bornés :  $]a, b]$ ,  $[a, b[$

### Remarque

L'**intérieur**  $\overset{\circ}{I}$  est l'intervalle ouvert correspondant à  $I$  (bornes exclues).

L'**adhérence**  $\bar{I}$  (ce n'est pas un complémentaire !) est l'intervalle fermé correspondant à  $I$  (bornes incluses).

Par exemple, si  $I = [0, 2[$ ,  $\overset{\circ}{I} = ]0, 2[$  et  $\bar{I} = [0, 2]$ . Si  $J = [0, +\infty[$ ...



## 4 Majorant, minorant, minimum, maximum

### Définition

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ .

Lorsque l'on a  $M \in \mathbb{R}$  (resp.  $m \in \mathbb{R}$ ) tel que  $\forall x \in A, x \leq M$  (resp.  $m \leq x$ ), on dit que  $A$  est **majorée** (resp. **minorée**).

Un tel  $M$  (resp.  $m$ ) est alors appelé **majorant** (resp. **minorant**) de  $A$ .

Lorsque  $A$  est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

### Remarque

Il n'y a pas unicité du majorant ou du minorant lorsqu'il existe !

### Propriété

$A$  est bornée si et seulement si il existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in A, |x| \leq K$ .

### Définition

Lorsqu'il existe, on appelle **maximum** (resp. **minimum**) d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  le plus grand (resp. petit) élément de  $A$ , c'est-à-dire un  $a \in A$  tel que  $\forall x \in A, x \leq a$  (resp.  $a \leq x$ ).

### Remarques

**R1** – Lorsqu'il existe, il est unique. (pourquoi ?)

**R2** – Il s'agit du seul majorant (resp. minorant) se trouvant lui-même dans  $A$ .

### Exemple

Sur des intervalles...

## 5 Partie entière

### Propriété

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n \leq x < n+1$ , c'est-à-dire  $x-1 < n \leq x$ .

### Démonstration

**Existence** : Admise. Provisoirement.

**Unicité** : Si  $n, m \in \mathbb{Z}$  conviennent,  $n \leq x < n+1$  et  $m \leq x < m+1$  donc  $n < m+1$  et  $m < n+1$  et comme ce sont des entiers  $n \leq m \leq n$  donc  $n = m$ . □

### Définition

Un tel  $n$  est appelé **partie entière** de  $x$ , notée  $\lfloor x \rfloor$ .

C'est le plus grand entier inférieur à  $x$  :  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

### Remarque

On peut aussi définir le plus petit entier supérieur (ou égal) à  $x$  c'est-à-dire vérifiant  $m < x \leq m+1$ . Il est noté  $\lceil x \rceil$ . Il s'agit de  $\lfloor x \rfloor + 1$  si  $x$  n'est pas entier et  $x$  sinon.

En anglais,  $\lfloor x \rfloor$  : floor (le sol),  $\lceil x \rceil$  : ceil (le plafond).

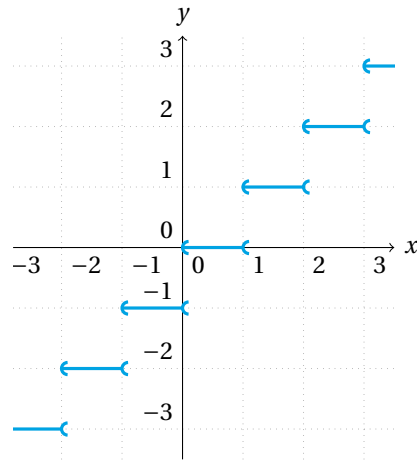


Figure 1 – La fonction partie entière

**Remarques**

**R1** –  $\triangleleft [-2.5] = -3!$

**R2** – En général  $[x + y] \neq [x] + [y]$ . Par exemple,  $[2.5 + (-2.5)] = 0 \neq 2 - 3 = -1$ .

**Propriété**

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

(i)  $x \in \mathbb{Z} \iff x = [x]$

(ii)  $\forall k \in \mathbb{Z}, [x + k] = [x] + k$

(iii)  $[\cdot]$  est croissante.

**Démonstration**

(i) Si  $x = [x], x \in \mathbb{Z}$

Si  $x \in \mathbb{Z}, x \leq x < x + 1$  donc par unicité  $x = [x]$ .

(ii)  $\underbrace{[x] + k}_{\in \mathbb{Z}} \leq x + k < [x] + k + 1$

□

## II Sommations, produits

### 1 Notations

**Notation : Signes  $\Sigma$  et  $\Pi$** 

Soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille finie de nombres réels (i.e.  $I$  est fini et  $\forall i \in I, a_i \in \mathbb{R}$ ).

On note  $\sum_{i \in I} a_i$  la somme des nombres  $a_i$  pour  $i$  parcourant  $I$ .

On note  $\prod_{i \in I} a_i$  le produit des nombres  $a_i$  pour  $i$  parcourant  $I$ .

**Remarques**

**R1** – Si  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

**R2** – La lettre  $i$  est totalement muette : on aurait aussi bien pu la noter  $k$  ou  $p$ , mais attention à ne pas utiliser la



même notation que dans les bornes ( $n$  ici).

**R3** – Par convention,  $\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$  et  $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$ .

### Définition : Factorielle

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle **factorielle** de  $n$  le nombre entier

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times \dots \times n \text{ si } n \neq 0 \text{ et } 0! = 1$$

## 2 Propriétés

### Propriété

Soient  $(a_i)_{i \in I}$  et  $(b_i)_{i \in I}$  deux familles finies de nombres réels, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$(i) \sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$$

$$(i') \prod_{i \in I} (a_i b_i) = \prod_{i \in I} a_i \prod_{i \in I} b_i$$

$$(ii) \sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i$$

$$(ii') \prod_{i \in I} \lambda = \lambda^{|I|}$$

$$(iii) \sum_{i \in I} \lambda = |I| \lambda$$

### Démonstration

Quitte à réordonner et réindexer les nombres (l'ordre n'est pas important, car la somme et le produit sont commutatifs sur  $\mathbb{R}$ ), on peut supposer  $I = \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $(a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  et  $(b_i)_{i \in I} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , où  $n = |I|$ .

Les propriétés se démontrent par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , et en utilisant les propriétés de la somme et du produit sur  $\mathbb{R}$ . Nous allons voir **seulement une idée intuitive** de celles-ci.

(i) L'associativité et la commutativité de la somme nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + b_1 + \dots + b_n) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

(ii) On utilise cette fois la distributivité du produit sur la somme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda a_i &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n \\ &= \lambda (a_1 + a_1 + \dots + a_n) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

(iii) Le cas particulier du point précédent avec  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = 1$  :

$$\sum_{i=1}^n \lambda = \underbrace{\lambda + \dots + \lambda}_{n \text{ fois}} = n\lambda$$

(i') L'associativité et la commutativité du produit nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (a_i b_i) &= (a_1 b_1)(a_2 b_2) \dots (a_n b_n) \\ &= (a_1 a_1 \dots a_n)(b_1 b_1 \dots b_n) \\ &= \prod_{i=1}^n a_i \prod_{i=1}^n b_i \end{aligned}$$

$$(ii') \quad \prod_{i=1}^n \lambda = \underbrace{\lambda \cdots \lambda}_{n \text{ fois}} = \lambda^n \quad \square$$

### 3 Changement d'indice

Il peut parfois être bien d'être utile d'effectuer des changements d'indices, c'est-à-dire de changer la façon dont les termes d'une somme (ou d'un produit) sont indexés (c'est possible par commutativité) : il faut cependant bien faire attention à ce que l'on utilise bien une et une seule fois chaque élément (on dira que le changement d'indice est **bijectif**).

En voici quelques exemples :

#### Exemples

$$E1 - \text{Si } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{1}{\ell^2}.$$

(Changement d'indice  $\ell = k+1$ ;  $0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1 \leq \ell = k+1 \leq n+1$ .)

$$E2 - \text{Si } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=0}^n (n-i) = \sum_{k=0}^n k.$$

(Changement d'indice  $k = n-i$ ;  $0 \leq k \leq n \Leftrightarrow 0 \leq k = n-i \leq n$ .)

### 4 Simplifications télescopiques

On voit sur un exemple une manière bien commode de calculer une somme, lorsque les termes s'écrivent sous forme d'une différence d'un terme avec son successeur  $a_k - a_{k+1}$  ou  $a_{k+1} - a_k$ .

#### Exemple

Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On remarque  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

En effectuant le changement d'indice  $j = k+1$  dans la seconde somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j}$$

$$\text{D'où } \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \right).$$

On peut le voir également en "développant" la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On a évidemment une version produit avec cette fois comme terme général  $\frac{a_k}{a_{k+1}}$  ou  $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ .

#### Exemple

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n+1.$$



## 5 Quelques formules à (très) bien connaître

### Propriété

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

### Remarque

Plus généralement, pour une suite arithmétique de terme général  $u_k = a + kb$ ,

$$\sum u_k = nb \text{ termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

### Démonstration

- Preuve inspirée de Gauss<sup>1</sup>, 7 ans.  
L'idée est d'écrire, pour  $n = 100$ ,

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 1 & + & 0 \\ \hline 100 & + & 100 & + & 100 & + & \cdots & + & 100 & + & 100 \end{array}$$

Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n k$ . Alors  $2S_n = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n k$ .

En effectuant un changement de variable  $\ell = n - k$  dans la deuxième somme, on obtient

$$2S_n = \sum_{k=0}^n k + \sum_{\ell=0}^n (n - \ell) = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n (n - k) = \sum_{k=0}^n (k + n - k) = \sum_{k=0}^n n = n \sum_{k=0}^n 1 = n(n+1)$$

Ainsi,  $\left( \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \right)$ .

**Autre possibilité** : on remarque que  $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ . En sommant pour  $k$  entre 0 et  $n$ , on obtient  $(n+1)^2 = 2 \sum_{k=0}^n k + (n+1)$ , d'où le résultat.

- Pour calculer  $\sum_{k=0}^n k^2$ , on remarque que  $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ .

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n \left( (k+1)^3 - k^3 \right) = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1.$$

$$\text{Or } \sum_{k=0}^n \left( (k+1)^3 - k^3 \right) = (n+1)^3 - 0^3 \text{ par simplification télescopique.}$$

$$\text{On obtient ainsi } (n+1)^3 = 3 \sum_{k=0}^n k^2 + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1).$$

$$3 \sum_{k=0}^n k^2 = (n+1) \left( (n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1 \right) = (n+1) \frac{2n^2 + n}{2}.$$

Donc  $\left( \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$ .

- De manière similaire,  $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ . Donc, on sommant pour  $k$  entre 0 et  $n$ ,

$$(n+1)^4 = 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4 \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

d'où

$$4 \sum_{k=0}^n k^3 = (n+1) \left( (n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1 \right) = (n+1) \left( n^3 + n^2 \right)$$

Ainsi,  $\left( \sum_{k=0}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right)$ .

□

**Propriété**

Soient  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

**Remarque**

Plus généralement, pour une suite géométrique de terme général  $u_k = a \times q^k$  avec  $q \neq 1$ ,

$$\sum u_k = \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nb termes}}}{1-q}.$$

**Démonstration**

$$(1-x) \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^k - \sum_{k=0}^n x^{k+1} = 1 - x^{n+1}. \quad \square$$

**Remarque**

Si  $x = 1$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n 1 = n+1$ .

**Propriété**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \end{aligned}$$

**Démonstration**

Soit en développant le membre de droite, soit on commence par  $1-x^n$  (somme géométrique) puis on factorise par  $a^n$ . □

**Remarques**

- R1 – Cas particulier de  $1-x^n$ .
- R2 – Si  $n$  est impair,  $a^n + b^n$ .
- R3 – Factorisation de  $a^3 \pm b^3$ .

## 6 Sommes doubles



1.

**Carl Friedrich Gauss** (Brunswick 1777 - Göttingen 1855) est un mathématicien, astronome et physicien allemand. Surnommé *le prince des mathématiciens*, il est considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Gauss était un génie particulièrement précoce : à 7 ans (ou 10 selon les sources), il donne la formule calculant  $1+2+\dots+100$ . À 19 ans, il fut le premier à démontrer la loi de réciprocité quadratique. Parmi ses autres prouesses, on peut citer la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, dans sa thèse en 1799, l'invention de la théorie des congruences, la résolution de problèmes de construction à la règle et au compas...Il est considéré comme le fondateur de la géométrie différentielle.



**Propriété**

Soit  $n_0, n, m_0, m \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n_0 \leq n$  et  $m_0 \leq m$ , et  $(a_{i,j})_{\substack{n_0 \leq i \leq n \\ m_0 \leq j \leq m}}$  une famille de nombres réels.

$$\sum_{\substack{n_0 \leq i \leq n \\ m_0 \leq j \leq m}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^n \left( \sum_{j=m_0}^m a_{i,j} \right) = \sum_{j=m_0}^m \left( \sum_{i=n_0}^n a_{i,j} \right)$$

**Démonstration**

Toutes ces formules ne sont que des conséquences de la commutativité et de l'associativité de la somme de nombres réels. On veut sommer tous les nombres  $a_{i,j}$  : ce qui change, c'est l'ordre dans lequel on somme. Voyons ce qui se passe pour les sommes (cela marche de la même manière pour les produits). Pour cela, on peut représenter les nombres dans un tableau :

	j				
i \		$m_0$	$m_0 + 1$	$\dots$	$m$
$n_0$		$a_{n_0, m_0}$	$a_{n_0, m_0+1}$	$\dots$	$a_{n_0, m}$
$n_0 + 1$		$a_{n_0+1, m_0}$	$a_{n_0+1, m_0+1}$	$\dots$	$a_{n_0+1, m}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$n$		$a_{n, m_0}$	$a_{n, m_0+1}$	$\dots$	$a_{n, m}$

- Sommation par lignes

$$\begin{aligned} \sum_{i=n_0}^n \left( \sum_{j=m_0}^m a_{i,j} \right) &= (a_{n_0, m_0} + a_{n_0, m_0+1} + \dots + a_{n_0, m}) \\ &\quad + (a_{n_0+1, m_0} + a_{n_0+1, m_0+1} + \dots + a_{n_0+1, m}) \\ &\quad + \dots + (a_{n, m_0} + a_{n, m_0+1} + \dots + a_{n, m}) \end{aligned}$$

On somme tous les nombres, ligne par ligne.

- Sommation par colonnes

$$\begin{aligned} \sum_{j=m_0}^m \left( \sum_{i=n_0}^n a_{i,j} \right) &= (a_{n_0, m_0} + a_{n_0+1, m_0} + \dots + a_{n, m_0}) \\ &\quad + (a_{n_0, m_0+1} + a_{n_0+1, m_0+1} + \dots + a_{n, m_0+1}) \\ &\quad + \dots + (a_{n_0, m} + a_{n_0+1, m} + \dots + a_{n, m}) \end{aligned}$$

On somme tous les nombres, colonne par colonne. □

**Exemples**

E1 -  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$

E2 -  $S = \sum_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ 1 \leq i+j \leq n}} (i+j)$  : ici, il est plus facile de sommer par diagonales  $i+j = \text{constante}$ .

$$S = \sum_{k=1}^n \sum_{i+j=k} (i+j) = \sum_{k=1}^n (k \cdot \#\{(i, j) \mid i+j=k\}) = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

**Remarque**

⚠  $n_0, n, m_0$  et  $m$  doivent être indépendants de  $i$  et  $j$  !

Voici des cas fréquents où il n'y a pas indépendance :

**Propriété**

Soit  $n_0, n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n_0 \leq n$ , et  $(a_{i,j})_{n_0 \leq i \leq j \leq n}$  une famille de nombres réels.

$$\sum_{n_0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^n \left( \sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=n_0}^n \left( \sum_{i=n_0}^j a_{i,j} \right)$$

$$\sum_{n_0 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^n \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=n_0}^n \left( \sum_{i=n_0}^{j-1} a_{i,j} \right)$$

**Démonstration**

Ici encore, un tableau vaut mieux qu'un long discours.

- Première série : sommation par lignes, puis par colonnes.

	j				
i \		$n_0$	$n_0 + 1$	...	$n$
$n_0$		$a_{n_0, n_0}$	$a_{n_0, n_0+1}$	...	$a_{n_0, n}$
$n_0 + 1$			$a_{n_0+1, n_0+1}$	...	$a_{n_0+1, n}$
⋮				⋱	⋮
$n$					$a_{n, n}$

- Seconde série : sommation par lignes puis par colonnes

	j					
i \		$n_0$	$n_0 + 1$	$n_0 + 2$	...	$n$
$n_0$			$a_{n_0, n_0+1}$	$a_{n_0, n_0+1}$	...	$a_{n_0, n}$
$n_0 + 1$				$a_{n_0+1, n_0+1}$	...	$a_{n_0+1, n}$
⋮					⋱	⋮
$n - 1$						$a_{n-1, n}$
$n$						

□

**Remarques**

- R1 – ⚠ Cette fois on ne peut pas inverser directement les deux sommes !
- R2 – Pour ne pas se tromper dans les indices :
  - Dire que  $n_0 \leq i \leq j \leq n$ , c'est dire que  $(n_0 \leq i \leq n \text{ et } i \leq j \leq n)$  ou bien que  $(n_0 \leq j \leq n \text{ et } n_0 \leq i \leq j)$  ;
  - Dire que  $n_0 \leq i < j \leq n$ , c'est dire que  $(n_0 \leq i < n \text{ et } i < j \leq n)$  ou bien que  $(n_0 < j \leq n \text{ et } n_0 \leq i < j)$ .

**Exemple**

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{24}.$$

## 7 Produits de sommes

**Propriété**

Soient  $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$  et  $(b_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^J$ .

$$\sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in J} b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} (a_i b_j)$$



## Démonstration

Distributivité de  $\times$  sur  $+$ .



### Remarques

R1 –  $\triangle$  : indice muet, mais si  $J = I$ ,

$$\sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in I} b_j = \sum_{i \in I} a_i \sum_{i \in I} b_i \neq \sum_{i \in I} a_i b_i$$

Cela ne fonctionne déjà pas avec deux termes si  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$  ( $a + a'$ )( $b + b'$ )  $\neq$   $ab + a'b'$  !

R2 –  $\sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in I} a_j = \sum_{i, j \in I} a_i a_j = \left( \sum_{i \in I} a_i \right)^2 \neq \sum_{i \in I} a_i^2$

R3 – Lorsque l'on multiplie deux polynômes, il est judicieux de sommer par diagonales :

$$\sum_i a_i x^i \times \sum_j b_j x^j = \sum_{i, j} a_i b_j x^{i+j} = \sum_k \left( \sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

## III Coefficients binomiaux et formule du binôme

### 1 Définition

#### Définition : Coefficients binomiaux

Soit  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\binom{n}{k}$  (prononcer  $k$  parmi  $n$ ) le nombre de parties à  $k$  éléments dans un ensemble qui en contient  $n$ .

### Remarques

R1 – C'est aussi le nombre de possibilités d'avoir  $k$  succès parmi  $n$  tirages à pile ou face, comme vous l'avez appris en classe de première en dessinant des arbres.

R2 –  $\binom{n}{0} = 1$  car la seule partie à 0 élément est  $\emptyset$ .

R3 –  $\binom{n}{1} = n$  car il y a  $n$  parties à un seul élément.

R4 –  $\binom{n}{n} = 1$  car il y a une seule partie à  $n$  éléments :  $E$ .

R5 – Si  $k > n$  ou  $k < 0$ ,  $\binom{n}{k} = 0$  car il n'y a pas de partie de  $E$  qui convienne.

### 2 Propriétés usuelles

#### Propriété

Si  $k > n$  ou  $k < 0$ ,  $\binom{n}{k} = 0$ .

Si  $0 \leq k \leq n$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!}$ .

**Démonstration**

Ok si  $k > n$ , admis sinon. □

**Propriété**

Si  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

**Démonstration**

Lorsque l'on prend une partie à  $k$  éléments de  $E$ , il reste une partie à  $n - k$  éléments de  $E$ .

Compter le nombre de parties à  $k$  élément revient alors à compter le nombre de supplémentaires de ces parties, i.e. de parties à  $n - k$  éléments. D'où le résultat.

**Ou alors** : avec les factorielles (attention aux cas particuliers). □

**Propriété : Formule de Pascal**

Si  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Démonstration**

Pour choisir  $k$  éléments parmi  $n$ , l'un d'eux étant noté  $x$ , il y a deux cas de figure (disjoints).

Soit on choisit  $x$  et  $k - 1$  autres éléments parmi les  $n - 1$  autres : il y a  $\binom{n-1}{k-1}$  possibilités.

Soit on ne choisit pas  $x$  et on choisit donc  $k$  éléments parmi les  $n - 1$  autres : il y a  $\binom{n-1}{k}$  possibilités.

Au final, on a  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  choix possibles. (Il est possible que l'un des deux soit nul : si  $k = n$ .)

**Ou alors** : avec les factorielles (attention aux cas particuliers). □

**Remarque**

Triangle de Pascal

**Propriété : (HP)**

Si  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

**Remarques**

**R1** – Hors-programme donc à savoir redémontrer.

**R2** – Facile à retenir en écrivant, pour  $k \neq 0$ , sous forme de factorisation,

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

**Démonstration**

On cherche le nombre de couples  $(x, A)$  tels que  $x \in A \subset B$  avec  $|A| = k$  et  $|B| = n$ . Il s'agit de l'élection du conseil municipal et du maire.



Deux stratégies :

- Soit on choisit d'abord la partie  $A$  de  $B$  ( $\binom{n}{k}$  choix) puis  $x$  dans  $A$  ( $k$  choix) ce qui donne  $k \binom{n}{k}$  possibilités.
- Soit on choisit d'abord  $x$  dans  $B$  ( $n$  choix) puis les  $k-1$  éléments de  $A \setminus \{x\}$  dans  $B \setminus \{x\}$  ( $\binom{n-1}{k-1}$  choix) ce qui donne  $n \binom{n-1}{k-1}$  possibilités.

**Autre preuve :** Avec les factorielles (attention aux cas particuliers). □

### 3 Formule du binôme de Newton

#### Propriété : Formule du binôme de Newton

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels et  $n$  un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

#### Démonstration

- **Preuve par dénombrement :**

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ fois}}$$

En développant, on obtient des termes de la forme  $x_1 x_2 \cdots x_n$  avec  $x_i = a$  ou  $b$ . Si on veut  $k$  termes  $a$ , on  $\binom{n}{k}$  choix, et le terme vaut  $a^k b^{n-k}$  car  $a$  et  $b$  commutent.

- **Preuve par récurrence** sur  $n$ , c'est simple si  $n=0$  ou  $1$ . Si c'est vrai pour  $n-1$ ,

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} = (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-k-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\ &\text{(associativité, distributivité, } a \text{ et } b \text{ commutent, dans la seconde somme)} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\ &\text{(changement d'indice } k \mapsto k-1) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\ &\text{(les termes ajoutés sont nuls)} \\ &= \sum_{k=0}^n \left( \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right) a^k b^{n-k} \\ &\text{(associativité, distributivité,)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &\text{(formule de Pascal étendue)} \end{aligned}$$

□

#### Corollaire

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

$$\bullet \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \text{ si } n \neq 0, 1 \text{ sinon.}$$

**Remarque**

D'où le nombre d'éléments de  $\mathcal{P}(E)$  lorsque  $E$  contient  $n$  éléments...

## IV Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss

### 1 Définition

#### Définition : Système linéaire

On appelle **système linéaire** sur  $\mathbb{R}$  tout système du type

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

de  $n$  équations à  $p$  inconnues  $x_1, \dots, x_p$ , de second membre  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$  et de coefficients  $(a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{np}$ .  
On appelle **matrice augmentée** associée au système la matrice :

$$M = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array} \right)$$

On appelle **système homogène associé** le système obtenu en annulant les seconds membres de chaque équation.

**Remarques**

- R1** – Dans le cas où il y a deux inconnues, cela revient à prendre l'intersection de  $n$  droites du plan (on doit donc trouver une droite, un point, ou rien).
- R2** – Dans le cas où il y a trois inconnues, cela revient à prendre l'intersection de  $n$  plans de l'espace (on doit donc trouver un plan, une droite, un point, ou rien).

### 2 Opérations élémentaires

#### Définition : Opérations élémentaires

On appelle opération élémentaire sur le système linéaire toute :

- **Transposition** de deux lignes  $L_i$  et  $L_j$  notée  $L_i \leftrightarrow L_j$ .
- **Transvection** : à une ligne  $L_i$  on ajoute  $\lambda$  fois une autre ligne  $L_j$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ , notée  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .
- **Dilatation** : on multiplie une ligne  $L_i$  par  $\lambda$ , avec  $\lambda \neq 0$ , notée  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ .

**Propriété**

Chaque opération élémentaire change un système linéaire en un système équivalent, c'est-à-dire ayant même ensemble de solutions.

**Remarque**

⚠ Une opération du type  $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$  n'est possible que si  $a \neq 0$ , il s'agit de la transvection  $L_i \leftarrow L_i + \frac{b}{a}L_j$  puis de la dilatation  $L_i \leftarrow aL_i$ .

### 3 Méthode du pivot de Gauss

**Définition : Système échelonné, pivot**

Un système linéaire est dit **échelonné** si les coefficients de chaque ligne commence par un nombre strictement croissant de zéros (jusqu'à être éventuellement tous nuls). Le premier coefficient non nul sur chaque ligne est appelé **pivot**.

**Exemples**

$$E1 - \begin{cases} \boxed{7}x + 2y + 3z = 0 \\ \quad \boxed{4}y + z = 1 \\ \qquad \quad \boxed{5}z = 12 \end{cases} \text{ est échelonné (et même triangulaire) avec comme pivots 7, 4 et 5, de matrice augmentée}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 12 \end{array} \right)$$

$$E2 - \begin{cases} \boxed{3}x + y + 7z = 19 \\ \qquad \quad \boxed{2}z = 1 \end{cases} \text{ est échelonné avec comme pivots 3, 2, de matrice augmentée}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

$$E3 - \begin{cases} \boxed{2}x_1 - x_2 + x_4 - 5x_5 + x_6 = 0 \\ \quad \boxed{3}x_2 + x_3 + 4x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 0 \\ \qquad \quad \quad \boxed{-4}x_4 + x_5 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \quad \boxed{6}x_6 = 0 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \quad 0 = 1 \end{cases} \text{ est échelonné avec comme pivots 2, 3, -4, 6, de matrice augmentée}$$

$$\left( \begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

**Propriété**

Tout système est équivalent à un système échelonné en ligne.

**Exemple**

$$\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 12 \\ x + 4y + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 12 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ -5y + 3z = 10 \\ -10y = -3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x + 4y + z = 1 \\ -5y + 3z = 10 \\ -6z = -23 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

Le calcul peut aussi se faire avec les matrices augmentées directement :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -23 \end{array} \right)$$

**Généralisation : algorithme du pivot de Gauss**

1. Si tous les coefficients sont nuls, le système est échelonné, c'est terminé.
2. Sinon, soit  $j_0$  le numéro de la première colonne non nulle : au moins un coefficients de la  $j_0^{\text{e}}$  inconnue (la colonne numéro  $j_0$ ) n'est pas nul, disons  $a_{i_0, j_0} = p \neq 0$ , ce sera un pivot<sup>1</sup> : le mettre dans la première ligne grâce à  $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & * & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * & * \end{array} \right)$$

3. On annule ensuite tous les coefficients de la première colonne avec les opérations  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i, j_0}}{p} L_1$ . On obtient un système de matrice augmentée de la forme

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{array} \right)$$

4. On recommence à l'étape 1 avec les lignes 2 à  $n$ .

1. On peut montrer qu'informatiquement, le meilleur choix est le plus grand coefficient non nul en valeur absolue. À la main : c'est sympathique lorsqu'il vaut  $\pm 1$ !



On obtient finalement un système de matrice augmentée de la forme

$$\left( \begin{array}{cccccccccccccccc|cccc} 0 & \dots & 0 & \boxed{p_1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & b'_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{p_2} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & b'_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{p_r} & * & \dots & * & & b'_r \\ & & & & & & & & & & & & & & & b'_{r+1} \\ & & & & & & & & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & & b'_n \end{array} \right)$$

avec  $p_1, \dots, p_r$  tous non nuls : ce sont les pivots, et  $r$  s'appelle le **rang** du système. Ce qui donne comme système équivalent :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 x_{i_1} + \dots = b'_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots = b'_2 \\ \vdots \\ \dots \dots \dots \dots \dots = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_n \end{array} \right.$$

Les dernières lignes avec membre de gauche nul s'appellent **relations de compatibilité**. Si elles sont correctes, on dit que le système est **compatible** : il y a des solutions.

On finit alors la résolution en remontant les équations : on exprime  $x_{i_r}$ , puis  $x_{i_{r-1}}$ , etc. jusqu'à  $x_{i_1}$  en fonction des  $p - r$  autres inconnues. C'est possible car les pivots sont non nuls.

Si  $r = p$ , il y a une unique solution.

**Remarques**

- R1 – Le déterminant pour les systèmes  $2 \times 2$  permet de savoir le système admet une unique solution.
- R2 – Dans tous les cas, les solutions du système, lorsqu'il y en a, s'écrivent sous la forme de somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque du système homogène associé.

**Exemples**

E1 – On termine la résolution du système de l'exemple précédent.

E2 – 
$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 2 \\ 3x + 7y + z = 3 \\ 4x + 10y + 6z = 5 \end{cases}$$

## 4 Exemple de résolution de système linéaire à paramètre

$$(S_\lambda) \begin{cases} 2x + \lambda y - z = 5 \\ (\lambda - 5)x + 3y + 7z = 7 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

Il faut à tout prix éviter d'utiliser un pivot dépendant du paramètre, ce qui conduit à des cas particuliers à traiter (le pivot ne doit pas être nul).