chapitre III

Compléments de calcul algébrique

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Nous disposons sur $\mathbb{R}$ de la relation $\leqslant$ appelée relation d'ordre, permettant de comparer deux nombres réels. Elle a le bon goût d'être compatible avec les opérations :

Propriété

Pour tous $x, y, u \in \mathbb{R}$,

$$x \leqslant y \Longrightarrow x+u \leqslant y+u.$$

Si, de plus, $0 \leqslant u$,

$$x \leqslant y \Longrightarrow xu \leqslant yu.$$

2 Valeur absolue

Définition : Valeur absolue

On appelle **valeur absolue** d'un réel x, le réel

$$|x| = \max(x, -x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriétés

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

(i) $|xy| = |x||y|$ *et si* $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

(ii) $x \leqslant |x|$, $-x \leqslant |x|$.

(iii) $\max(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(x+y+|x-y|\right)$

$\min(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(x+y-|x-y|\right)$.

Propriété

Soit x et M deux réels avec $M \geqslant 0$.

(i) $|x| \leqslant M$ *si et seulement si* $-M \leqslant x \leqslant M$

(ii) $|x| \geqslant M$ *si et seulement si* $x \leqslant -M$ *ou* $x \geqslant M$

(On a les relations similaires en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.)

Propriété : Inégalité triangulaire

Soient x et y deux nombres réels.
Alors

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|$$

Cas d'égalité :

$$|x+y| = |x|+|y| \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$$

3 Intervalles

Définition

Il y a neuf types d'intervalles réels :

- Les fermés non bornés : $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$
- Les ouverts non bornés : $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$
- L'ouvert-fermé non borné : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- Les segments = fermés-bornés : $[a, b]$
- Les ouverts bornés : $]a, b[$ (en particulier $\varnothing$)
- Les semi-ouverts bornés : $]a, b]$, $[a, b[$

4 Majorant, minorant, minimum, maximum

Définition

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Lorsque l'on a $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que $\forall x \in A$, $x \leqslant M$ (resp. $m \leqslant x$), on dit que A est **majorée** (resp. **minorée**).

Un tel M (resp. m) est alors appelé **majorant** (resp. **minorant**) de A.

Lorsque A est à la fois majorée et minorée, on dit qu'elle est **bornée**.

Propriété

A est bornée si et seulement s'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leqslant K$.

Définition

Lorsqu'il existe, on appelle **maximum** (resp. **minimum**) d'une partie A de $\mathbb{R}$ le plus grand (resp. petit) élément de A, c'est-à-dire un $a \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \leqslant a$ (resp. $a \leqslant x$).

5 Partie entière

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, c'est-à-dire $x-1 < n \leqslant x$.

Définition

Un tel n est appelé **partie entière** de x, notée $\lfloor x \rfloor$.

C'est le plus grand entier inférieur à x : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(i) $x \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow x = \lfloor x \rfloor$

(ii) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x+k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$

(iii) $\lfloor \cdot \rfloor$ *est croissante.*

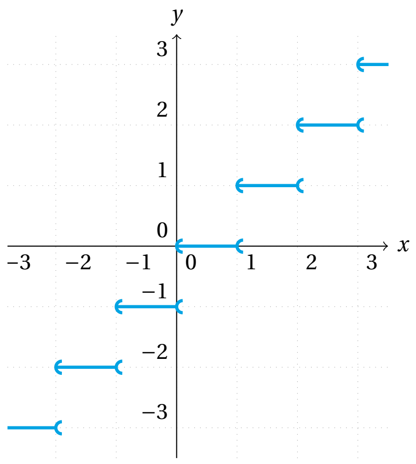

Figure 1 – La fonction partie entière

II Sommations, produits

1 Notations

Notation : Signes Σ et Π

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres réels (i.e. I est fini et $\forall i \in I,\ \ a_i \in \mathbb{R}$).

On note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la somme des nombres a_i pour i parcourant I.

On note $\prod\limits_{i\in I} a_i$ le produit des nombres a_i pour i parcourant I.

Définition : Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle ***factorielle*** de n le nombre entier

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1\times 2 \times \cdots \times n \text{ si } n \neq 0 \text{ et } 0! = 1$$

2 Propriétés

Propriété

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres réels, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\sum\limits_{i\in I} (a_i + b_i) = \sum\limits_{i\in I} a_i + \sum\limits_{i\in I} b_i$

(ii) $\sum\limits_{i\in I} \lambda a_i = \lambda \sum\limits_{i\in I} a_i$

(iii) $\sum\limits_{i\in I} \lambda = |I|\,\lambda$

(i') $\prod\limits_{i\in I} (a_i b_i) = \prod\limits_{i\in I} a_i \prod\limits_{i\in I} b_i$

(ii') $\prod\limits_{i\in I} \lambda = \lambda^{|I|}$

3 Changement d'indice

Il peut parfois être bien d'utile d'effectuer des changements d'indices, c'est-à-dire de changer la façon dont les termes d'une somme (ou d'un produit) sont indexés (c'est possible par commutativité) : il faut cependant bien faire attention à ce que l'on utilise bien une et une seulement fois chaque élément (on dira que le changement d'indice est ***bijectif***).

4 Simplifications télescopiques

On voit sur un exemple une manière bien commode de calculer une somme, lorsque les termes s'écrivent sous forme d'une différence d'un terme avec son successeur $a_k - a_{k+1}$ ou $a_{k+1} - a_k$.

On a évidemment une version produit avec cette fois comme terme général $\frac{a_k}{a_{k+1}}$ ou $\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

5 Quelques formules à (très) bien connaître

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Propriété

Soient $x \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{x \neq 1,}$ $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Propriété

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \end{aligned}$$

6 Sommes doubles

Propriété

Soit $n_0, n, m_0, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_0 \leqslant n$ et $m_0 \leqslant m$, et $(a_{i,j})_{\substack{n_0\leqslant i\leqslant n \\ m_0 \leqslant j \leqslant m}}$ une famille de nombres réels.

$$\sum_{\substack{n_0\leqslant i\leqslant n \\ m_0\leqslant j\leqslant m}} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=m_0}^{m} a_{i,j}\right) = \sum_{j=m_0}^{m}\left(\sum_{i=n_0}^{n} a_{i,j}\right)$$

Voici des cas fréquents où il n'y a pas indépendance :

Propriété

Soit $n_0, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_0 \leqslant n$, et $(a_{i,j})_{n_0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille de nombres réels.

$$\sum_{n_0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=n_0}^{n}\left(\sum_{i=n_0}^{j} a_{i,j}\right)$$

$$\sum_{n_0\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=n_0}^{n}\left(\sum_{i=n_0}^{j-1} a_{i,j}\right)$$

7 Produits de sommes

Propriété

Soient $(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ et $(b_j)_{j\in J}\in\mathbb{R}^J$.

$$\sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j = \sum_{(i,j)\in I\times J} \left(a_i b_j\right)$$

III Cœfficients binomiaux et formule du binôme

1 Definition

Définition : Cœfficients binomiaux

Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$. On note $\binom{n}{k}$ (prononcer k parmi n) le nombre de parties à k éléments dans un ensemble qui en contient n.

2 Propriétés usuelles

Propriété

Si $k>n$ ou $k<0$, $\binom{n}{k}=0$.

Si $0\leqslant k\leqslant n$, $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!}$.

Propriété : Formule de Pascal

Si $k\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

Propriété : (HP)

Si $k\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

3 Formule du binôme de Newton

Propriété : Formule du binôme de Newton

Soit a et b deux nombres réels et n un entier naturel.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Corollaire

Soit $n\in\mathbb{N}$,

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$ *si $n\neq 0$, 1 sinon.*

IV Systèmes linéaires, méthode du pivot de Gauss

1 Définition

Définition : Système linéaire

On appelle **système linéaire** sur $\mathbb{R}$ tout système du type

$$(S)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1\\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n\end{cases}$$

de n équations à p inconnues $x_1,\ldots,x_p$, de second membre $(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{K}^n$ et de cœfficients $(a_{i,j})_{i,j}\in\mathbb{K}^{np}$.

On appelle **matrice augmentée** associée au système la matrice :

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \ldots & a_{1,p} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,p} & b_n\end{array}\right)$$

On appelle **système homogène associé** le système obtenu en annulant les seconds membres de chaque équation.

2 Opérations élémentaires

Définition : Opérations élémentaires

On appelle opération élémentaire sur le système linéaire toute :

- **Transposition** de deux lignes L_i et L_j notée $L_i\leftrightarrow L_j$.
- **Transvection** : à une ligne L_i on ajoute λ fois une autre ligne L_j, avec $\lambda\in\mathbb{K}$, notée $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$.
- **Dilatation** : on multiplie une ligne L_i par λ, avec $\boxed{\lambda\neq 0,}$ notée $L_i\leftarrow\lambda L_i$.

Propriété

Chaque opération élémentaire change un système linéaire en un système équivalent, c'est-à-dire ayant même ensemble de solutions.

3 Méthode du pivot de Gauss

Définition : Système échelonné, pivot

Un système linéaire est dit **échelonné** si les cœfficients de chaque ligne commence par un nombre strictement croissant de zéros (jusqu'à être éventuellement tous nuls). Le premier cœfficient non nul sur chaque ligne est appelé **pivot**.

Propriété

Tout système est équivalent à un système échelonné en ligne.

Méthode du pivot de Gauss

On suppose qu'au moins un cœfficient est non nul dans le système (!)

1. Si tous les cœfficients sont nuls, le système est échelonné, c'est terminé.
2. Sinon, soit j_0 le numéro de la première colonne non nulle : au moins un cœfficients de la $j_0{}^e$ inconnue (la colonne numéro j_0) n'est pas nul, disons $a_{i_0,j_0} = p \neq 0$, ce sera un pivot [1] : le mettre dans la première ligne grâce à $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$.
3. On annule ensuite tous les cœfficients de la première colonne avec les opérations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p} L_1$. On obtient un système de matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * & * \end{array}\right)$$

4. On recommence à l'étape 1 avec les lignes 2 à n.

On obtient finalement un système de matrice augmentée de la forme

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & \boxed{p_1} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & b'_1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{p_2} & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * & b'_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{p_r} & * & \dots & * & b'_r \\ & & & & & & & & & & & & & & b'_{r+1} \\ & & & & & & (0) & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & & & & & b'_n \end{array}\right)$$

avec $p_1, \dots, p_r$ tous non nuls : ce sont les pivots, et r s'appelle le **rang** du système.

Ce qui donne comme système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} p_1 x_{i_1} & + & \dots & & & & & = & b'_1 \\ & & p_2 x_{i_2} & + & \dots & & & = & b'_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & p_r x_{i_r} & + & \dots & = & b'_r \\ & & & & & & 0 & = & b'_{r+1} \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & 0 & = & b'_n \end{array}\right.$$

Les dernières lignes avec membre de gauche nul s'appellent **relations de compatibilité**. Si elles sont correctes, on dit que le système est **compatible** : il y a des solutions.

On finit alors la résolution en remontant les équations : on exprime x_{i_r}, puis $x_{i_{r-1}}$, etc. jusqu'à x_{i_1} en fonction des $p-r$ autres inconnues. C'est possible car les pivots sont non nuls.

Si $r = p$, il y a une unique solution.

1. On peut montrer qu'informatiquement, le meilleur choix est le plus grand cœfficient non nul en valeur absolue. À la main : c'est sympathique lorsqu'il vaut ± 1 !