Devoir Libre n°1

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).
La rédaction est à soigner tout particulièrement !

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier la réponse et rectifier si c'est faux.

1. Soit E un ensemble, A et B des parties de E. $A \not\subset B \Rightarrow B \subset A$.
2. x est un entier naturel pair si et seulement si ($x \in \mathbb{R}$ et $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$).
3. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[= \varnothing$.
4. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x)g(x) = 0 \Longleftrightarrow \left|\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R},\quad g(x) = 0 \end{array}\right.$$

5. L'ensemble des solutions de $\sqrt{x^2-1} > -x-1$ est $]-\infty, -1[$.

Exercice 2 : Résolution d'une inéquation à paramètre avec radical

Résoudre l'inéquation

$$\sqrt{mx+1} \geqslant x$$

où m est un paramètre réel.

Exercice 3 : Suite de Fibonacci

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

On traitera cet exercice sans déterminer le terme général de la suite $(u_n)_n$.

1. Calculer les 10 premiers termes de la suite.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$.
4. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$.