Corrigé du Devoir Libre n°1

Exercice 1 : Vrai ou faux ?

1. L'énoncé est faux. Voir contre-exemples vus en cours.

2. L'énoncé est vrai. En effet,

- Si x est un entier naturel pair, on a bien $x \in \mathbb{R}$ et x s'écrit $2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$.
- Réciproquement, si $x \in \mathbb{R}$ et $\frac{x}{2} \in \mathbb{N}$, notons $k = \frac{x}{2}$. Alors $x = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, donc x est un entier naturel pair.

3. L'énoncé est faux. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \in \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, donc $1 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$ et ce dernier ensemble est non vide.

On a par ailleurs $\boxed{\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[= \{1\},}$ car, réciproquement, si $x \in \left]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1-\frac{1}{n} < x < 1+\frac{1}{n}$, donc, en passant à la limite, $1 \leqslant x \leqslant 1$ soit $x = 1$.

4. L'énoncé est faux. Si le sens $\Leftarrow$ est correct (si les deux fonctions sont nulles, leur produit l'est), on peut trouver un contre-exemple pour l'autre sens.

Soit, par exemple, f et g deux fonctions telles que $f(x) = 1$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $g(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.
Alors, si $x \in \mathbb{R}$, soit $x \neq 0$ et $f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$, soit $x = 0$ et $f(0)g(0) = 0 \times 1 = 0$.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)g(x) = 0$, et pourtant ni f ni g n'est constamment nulle.

Un énoncé correct serait par exemple $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)g(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left| \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ \text{ou} \\ g(x) = 0 \end{array} \right.}$

5. Le résultat est faux car, par exemple, 1 est solution.

Résolvons l'inéquation : elle a un sens lorsque $x^2 - 1 \geqslant 0$, on résout donc sur $D =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. On a alors

$$\sqrt{x^2-1} > -x-1 \iff x \in D \text{ et } \left| \begin{array}{l} -x-1 < 0 \\ \text{ou} \\ \begin{cases} -x-1 \geqslant 0 \\ x^2-1 > (-x-1)^2 \quad (\natural) \quad \text{par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+. \end{cases} \end{array} \right.$$

Or $(\natural) \iff 2x+2 < 0 \iff x < -1$. Finalement, $\sqrt{x^2+1} > -x-1 \iff x \in D$ et $x \neq -1$.

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est }]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.}$

Exercice 2 : Résolution d'une inéquation à paramètre avec radical

Notons (♣) l'équation $\sqrt{mx+1} \geqslant x$, et $\mathscr{S}_m$ l'ensemble des solutions de (♣).
Pour déterminer l'ensemble sur lequel cette équation est bien définie, il faut distinguer deux cas :

- Soit $m = 0$, et alors (♣) devient $1 \geqslant x$ et donc $\boxed{\mathscr{S}_0 =]-\infty, 1].}$
- Soit $m \neq 0$ et, pour que la racine soit correctement définie, on résout alors sur $D_m = \left[-\frac{1}{m}, +\infty\right[$ si $m > 0$ et sur $D_m = \left]-\infty, -\frac{1}{m}\right]$ si $m < 0$. On a alors

$$(♣) \iff \begin{cases} x \in D_m \\ \left| \begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \text{ou} \\ x > 0 \text{ et } mx+1 \geqslant x^2 \quad \text{(par croissance de } t \mapsto t^2 \text{ et } t \mapsto \sqrt{t} \text{ sur } \mathbb{R}^+) \end{array} \right. \end{cases}$$
$$\iff \left| \begin{array}{l} x \leqslant 0 \text{ et } x \in D_m \\ \text{ou} \\ x \in D_m \text{ et } x > 0 \text{ et } x^2 - mx - 1 \leqslant 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que dans la dernière ligne, le $x \in D_m$ est superflu, car il est contenu dans le fait que $mx+1 \geqslant x^2$ puisque $x^2 \geqslant 0$.

Le discriminant de $x^2 - mx - 1$ est $m^2 + 4 > 0$, ce trinôme a donc deux racines distinctes

$$x_- = \frac{m - \sqrt{m^2+4}}{2} \qquad x_+ = \frac{m + \sqrt{m^2+4}}{2}$$

et est négatif lorsque x est entre les deux racines. Quel est le signe de x_- et de x_+ ?
Comme $m^2 < m^2+4$, $|m| < \sqrt{m^2+4}$ donc $-\sqrt{m^2+4} < -m < \sqrt{m^2+4}$ et $x_- < 0 < x_+$

- Ainsi, pour $m > 0$

$$(♣) \iff \left| \begin{array}{l} -\frac{1}{m} \leqslant x \leqslant 0 \\ \text{ou} \\ 0 < x \leqslant x_+ \end{array} \right.$$

et donc, $\boxed{\text{si } m > 0, \ \mathscr{S}_m = \left[-\frac{1}{m}, \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right].}$

- Dans le cas où $m < 0$,

$$(♣) \iff \left| \begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ \text{ou} \\ 0 < x \leqslant x_+ \end{array} \right.$$

D'où $\boxed{\text{pour } m < 0, \ \mathscr{S}_m = \left]-\infty, \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}\right].}$

Exercice 3 : Suite de Fibonacci

1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

2. Par récurrence double sur n, en posant $\mathscr{P}(n)$: « $u_n \geqslant n$ ».
Les initialisations (2 sont nécessaires !) est donnée par la question 1.
Soit $n \geqslant 0$ pour lequel $u_n \geqslant n$ et $u_{n+1} \geqslant n+1$, alors $u_{n+2} \geqslant n+n+1 = 2n+1 \geqslant n+2$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n = 0$, on a bien $u_2 \geqslant 2$. Récurrence établie. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n.}$ Ainsi, $\boxed{\text{lorsque } n \to +\infty, \ u_n \to \infty.}$

3. Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\mathscr{P}(n)$: « $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$ ».
Pour $n = 1$, on a bien $1^2 - 1 \times 2 = (-1)^1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$,. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} &= u_{n+1}^2 - u_n^2 - u_n u_{n+1} = u_{n+1}^2 - u_n u_{n+1} - u_{n-1}u_{n+1} - (-1)^n \text{ par (HR)} \\ &= u_{n+1}(u_{n+1} - u_n - u_{n-1}) + (-1)^{n+1} = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Récurrence établie. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n.}$

4. Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\mathscr{P}(n)$: « $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$ ».
Pour $n = 1$, $1 = 2 - 1$: Ok.
Soit $n \geqslant 1$ pour lequel $u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} &= u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n+1} = u_{2n} - 1 + u_{2n+1} \text{ par (HR)} \\ &= u_{2n+2} - 1 \end{aligned}$$

Récurrence établie. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n} - 1.}$

Remarque : sans récurrence (telescopage)

$$u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n-1} = (u_2 - u_0) + (u_4 - u_2) + \cdots + (u_{2n-2} - u_{2n-4}) + (u_{2n} - u_{2n-2}) = u_{2n} - u_0 = u_{2n} - 1$$

.

---

5. Par récurrence simple sur $n \in \mathbb{N}$, en posant $\mathscr{P}(n)$: « $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$ ».
Pour $n = 0$, $1 = 2 - 1$: Ok.
Soit $n \geqslant 0$ tel que $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$. Alors

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1} &= u_0 + u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} = u_{n+2} - 1 + u_{n+1} \text{ par (HR)} \\ &= u_{n+3} - 1 \end{aligned}$$

Récurrence établie. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1.}$

Remarque : sans récurrence (telescopage)

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + (u_4 - u_3) + \cdots + (u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) = u_{n+2} - u_1 = u_{n+2} - 1$$

.

$\mathscr{F}in$