Logique, Raisonnements & Quantificateurs

1. Logique

1 A, B et C étant trois assertions, étudier la véracité des assertions :

1. $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$
2. $(A \vee B) \Longleftrightarrow \big((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow B\big)$
3. $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \wedge (B \vee C)$
4. $\big(A \vee (\overline{A} \wedge B)\big) \Longleftrightarrow (A \vee B)$

Solution de 1 :
(indications)

1. Traduire $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$ avec des « ou ». Réponse : Vrai.
2. Idem. Réponse : Vrai.
3. Table de vérité.
4. Réponse : Vrai.

Solution de 1 :
(corrigé)

1. $(A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)) \Longleftrightarrow (\overline{A} \vee (\overline{B} \vee A))$. Cette dernière assertion est toujours vraie car on a toujours A vraie ou $\overline{A}$ vraie.
Donc $\boxed{A \Longrightarrow (B \Longrightarrow A) \text{ est toujours vraie.}}$
2. $((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow B) \Longleftrightarrow (\overline{A \Longrightarrow B} \vee B) \Longleftrightarrow ((A \wedge \overline{B}) \vee B) \Longleftrightarrow (A \vee B)$ car $\overline{B} \vee B$ est toujours vrai.
Donc $\boxed{(A \vee B) \Longleftrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow B) \text{ est toujours vraie.}}$
3. On note P l'assertion $\big(A \vee (B \wedge C)\big) \wedge (B \vee C)$. La table de vérité de P est

A	B	C	$B \wedge C$	$B \vee C$	$A \vee (B \wedge C)$	P
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

4. $\big(A \vee (\overline{A} \wedge B)\big) \Longleftrightarrow (A \vee \overline{A}) \wedge (A \vee B)$ et on a toujours A vraie ou $\overline{A}$ vraie.
Donc $\boxed{\big(A \vee (\overline{A} \wedge B)\big) \Longleftrightarrow (A \vee B).}$

2 Soient p, q et r trois assertions. Montrer que

1. $\big(p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)\big) \Longleftrightarrow \big((p \wedge q) \Longrightarrow r\big)$
2. $\big((p \vee q) \Longrightarrow r\big) \Longleftrightarrow \big((p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)\big)$
3. $\begin{cases} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \\ r \Longrightarrow p \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p \Longleftrightarrow q \\ q \Longleftrightarrow r \\ r \Longleftrightarrow p \end{cases}$
(c'est-à-dire, plus synthétiquement, $(p \Longrightarrow q \Longrightarrow r \Longrightarrow p) \Longleftrightarrow (p \Longleftrightarrow q \Longleftrightarrow r)$.)

Solution de 2 :
(indications)

1. Traduire avec des connecteurs ou, non, et.
2. Idem.
3. Double implication.

2. Quantificateurs

3 ✎ Exprimer en langage courant les assertions suivantes, et dire lesquelles sont vraies

$$\bullet x \in \mathbb{N} \bullet y \in \mathbb{N} \bullet z \in \mathbb{N} \quad x = yz$$

où l'on remplacera chaque $\bullet$ par $\forall$ ou $\exists$ (il doit donc y avoir au total $2^3 = 8$ assertions différentes.)

Solution de 3 :
(indications) 4 faux, 4 vrais.

Solution de 3 :
(corrigés)

- $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
Tout nombre entier produit de n'importe quel entier par n'importe quel autre entier.
$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : pour $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$, on n'a pas $1 = 2 \times 3$.

- $\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
Tout entier x est divisible par tout entier y.
$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : pour $x = 1$, $y = 2$, on ne peut pas trouver $z \in \mathbb{N}$ tel que $1 = 2z$ car $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

- $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
Le quotient de tout entier x par un entier z est un entier y indépendant de z.
$\boxed{\text{Faux.}}$ (La négation est $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x \neq yz$) Contre-exemple : pour $x = 1$, pour tout entier y, $1 \neq y \times y$ si $y \neq 1$ (on prend $z = y$), et $1 \neq 1 \times 2$ si $y = 1$ (on prend $z = 2$).

- $\forall x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ \ x = yz$
Tout nombre entier x est le multiple d'un entier y.
$\boxed{\text{Vrai.}}$ Il suffit de prendre $x = y$ et $z = 1$.

- $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ x = yz$
  Il existe un entier x tel que tout entier z est le quotient de x par n'importe quel entier y.
  $\boxed{\text{Faux.}}$ Si $x \neq 0$, $x \neq 0 \times 0$; si $x = 0$, $x \neq 1 \times 1$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$
  Il existe un entier x divisible par n'importe quel entier y.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$ $x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ x = yz$
  Il existe deux entiers x et y tel que tout entier z soit le quotient de x par y.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$ $x = y = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{N},\ \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$
  Il existe deux entiers x et y tel que y divise x.
  $\boxed{\text{Vrai.}}$

4 ✎ Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec des quantificateurs

1. La fonction f est nulle.
2. La fonction f s'annule.
3. La fonction f est décroissante.
4. La fonction f n'est pas croissante.
5. La fonction f est majorée par 2.
6. La fonction f est majorée.
7. La suite $(u_n)_n$ est constante.
8. La suite $(u_n)_n$ est stationnaire (constante à partir d'un certain rang).
9. La suite $(u_n)_n$ est croissante.
10. La suite $(u_n)_n$ est bornée.

5 ✎ Donner la négation des propositions suivantes

1. $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1 \text{ ou } f(x) \leqslant -1$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 0)$

3. Équations, inéquations

6 Résoudre, sur leur ensemble de définition à préciser, les équations suivantes :

1. $x^2 + 5x + 12 = 0$
2. $\dfrac{2(x-1)}{x+2} = \dfrac{2x-1}{x-3}$
3. $x^2 + 8x - 5 = 0$
4. $\sqrt{x^2-4} = x + 3$
5. $\sqrt{x^2-4} = -x - 3$
6. $|3x+5| = |1-2x|$

Solution de 6 :
(réponses)

1. Réponse : $\dfrac{-5 \pm i\sqrt{23}}{2}$.
2. Réponse : $\dfrac{8}{11}$.
3. Réponse : $-4 \pm \sqrt{21}$.
4. Attention aux équivalences/à la synthèse...
5. ...sinon on a des surprises ici !
6. Réponse : -6 et $-\dfrac{4}{5}$.

Solution de 6 :
(corrigé)

1. On résout sur $\mathbb{C}$. Le discriminant est $\Delta = -23$. Les solutions sont $\boxed{\dfrac{-5 \pm i\sqrt{23}}{2}.}$
2. On résout sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$. Il y a une unique solution $\boxed{\dfrac{8}{11}.}$
3. On résout sur $\mathbb{C}$. Le discriminant réduit est $\Delta' = 21$. Les solutions sont $\boxed{-4 \pm \sqrt{21}.}$
4. On résout sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. L'équation est équivalente à $x^2 - 4 = (x+3)^2$ et $x + 3 \geqslant 0$. Il y a une unique solution $\boxed{-\dfrac{13}{6}.}$
5. On résout sur $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. L'équation est équivalente à $x^2 - 4 = (x+3)^2$ et $x + 3 \leqslant 0$. Il n'y a $\boxed{\text{pas de solution.}}$
6. On résout sur $\mathbb{R}$. L'équation est équivalente à $(3x+5)^2 = (1-2x)^2$. Les solutions sont $\boxed{-6 \text{ et } -\dfrac{4}{5}.}$

7 Résoudre, sur leur ensemble de définition (à préciser) les inéquations suivantes :

1. $-x^2 + 3x + 5 < 0$
2. $|x-4| > 5$
3. $|x+2| \leqslant 1$
4. $x^4 + 3x^2 - 1 \geqslant 0$
5. $\sqrt{x^2+x-2} > 3x - 4$
6. $x + \dfrac{m}{x} \geqslant 3$ (où m est un paramètre réel)

Solution de 7 :
(réponses)

1.
2. Réponse : $]-\infty, -1[\cup]9, +\infty[$.
3. Réponse : $[-3, 1]$.
4. Réponse : $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, +\infty\right[$.
5. Réponse : $]-\infty, -2] \cup [1, 2[$.

6. Réponse : $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \text{si} \quad m \geqslant \frac{9}{4} \\ \left[\frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}, 0\right[\cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si} \quad m \leqslant 0 \\ \left]0, \frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si} \quad 0 \leqslant m \leqslant \frac{9}{4} \end{cases}$

Solution de 7 :

(corrigé)

1. On résout sur $\mathbb{R}$. Le discriminant est $\Delta = 29$. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathbb{R} \setminus \left[\frac{-3-\sqrt{29}}{2}, \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right]}$.
2. On résout sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, -1[\cup]9, +\infty[}$.
3. On résout sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions est $\boxed{[-3, 1]}$.
4. On résout sur $\mathbb{R}$. On fait un changement d'inconnue $X = x^2$. Le discriminant est alors $\Delta = 13$.
   L'ensemble des solutions est $\boxed{\left]-\infty, -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}, +\infty\right[}$.
5. On résout sur $]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$. Il faut différencier deux cas selon le signe de $3x-4$.
   L'ensemble des solutions est $\boxed{]-\infty, -2] \cup [1, 2[}$.
6. L'équation est définie sur $\mathbb{R}$ si $m = 0$, sur $\mathbb{R}^*$ sinon. Il faut alors différencier deux cas selon le signe de x. On se ramène à un trinôme du second degré de discriminant $9-4m$. L'ensemble $\mathscr{S}_m$ des solutions est

$$\boxed{S_m = \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \text{si} \quad m \geqslant \frac{9}{4} \\ \left[\frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}, 0\right[\cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si} \quad m \leqslant 0 \\ \left]0, \frac{3-\sqrt{9-4m}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{9-4m}}{2}, +\infty\right[& \text{si} \quad 0 \leqslant m \leqslant \frac{9}{4} \end{cases}}$$

8 ✎ Si $1 \leqslant x \leqslant 5$ et $-3 \leqslant y \leqslant 12$, encadrer $x - y$ et $2y - x$.

4. Raisonnement par récurrence

9 On démontre par récurrence qu'étant donné une boite de $n \in \mathbb{N}^*$ crayons de couleurs, ils sont tous de la même couleur.

- Si $n = 1$, c'est immédiat.
- Si c'est vrai pour un $n \in \mathbb{N}^*$, soit une boite de $n+1$ crayons, notés $c_1, \ldots, c_{n+1}$.
  - ⋆ Les crayons $c_1, \ldots, c_n$ sont tous de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  - ⋆ Les crayons $c_2, \ldots, c_{n+1}$ sont tous de la même couleur par hypothèse de récurrence.

  Donc les crayons $c_1, \ldots, c_{n+1}$ sont tous de la même couleur, ce qui établit la récurrence.

Qu'en pensez-vous ?

Solution de 9 :

(réponse) On ne peut pas passer de $n = 1$ à $n = 2$.

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n(n-1)$.

Solution de 10 :

(indication) Récurrence d'ordre 3.

11 Montrer que (sans utiliser les congruences !) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $17^n - 1$ est divisible par 16.

Solution de 11 :

(indication) Récurrence simple. $17 = 16 + 1$.

12 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}, \quad n^2 \leqslant 2^n$.

Solution de 12 :

(indication) Récurrence simple.

13 On admet que tout entier $\geqslant 2$ possède un diviseur premier. Montrer que tout entier naturel non nul s'écrit comme produit de nombres premiers.

Solution de 13 :

(indication) Récurrence forte.

14 Montrer que $\forall n \geqslant 2, \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Remarque : on peut montrer que le membre de gauche tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution de 14 :

(indication) Récurrence. Pour comparer deux nombres, on peut étudier leur....

5. Autres raisonnements

15 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Solution de 15 :

(indication) Raisonner par disjonction de cas.

16 Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme somme d'une fonction affine et d'une fonction nulle 0 et d'intégrale nulle sur $[0,1]$.

Solution de 16 :

(indication) Raisonner par analyse-synthèse.
On doit trouver que la fonction affine est $x \mapsto 2\left(\int_0^1 f - f(0)\right)x + f(0)$.

17 Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + x f(1-x) = 1 + x.$$

1. On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente.
   (a) Que vaut $f(0)$? $f(1)$?
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
2. Quelles sont les fonctions f solution du problème ?

18 ✦ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$.

Solution de 18 :

(indication) Raisonner par analyse-synthèse.
On doit trouver la seule fonction $f : x \mapsto 1 - x$.

19 ★ Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f \circ g = g \circ f$.

Solution de 19 :

(indication) Raisonner par analyse-synthèse.
On doit trouver la seule fonction $f = \mathrm{id}$.