

Ensembles

1 Un ensemble est dit *décrit en compréhension* lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit *décrit en extension* lorsque l'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k; k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

- Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
- Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \dots\}$.
- Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
- Décrire en en compréhension l'ensemble $]0, 1[$. Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?
- Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Solution de 1 :


- $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k + 1\} = \{2k + 1; k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 10^k\} = \{10^k; k \in \mathbb{Z}\}$.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.
- $]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = \left\{ \frac{1}{x}, x \geq 1 \right\} = \left\{ \cos(x), 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \right\}$.
- $\text{Im } f = \{f(x), x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}$.

2 Démontrer les relations suivantes

- $\{n \in \mathbb{Z} \mid (-1)^n = 1\} = 2\mathbb{Z}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4x - 2\} \subset \mathbb{R}^+$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$

Solution de 2 :

- n est un entier pair si et seulement si $(-1)^n = 1$.
- Si $x^2 = 4x - 2$, alors $4x = x^2 + 2 \geq 0$.
- \supset : ok. \subset : si $x^2 + y^2 = 0$ alors $x^2 = -y^2 \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$.
- \supset : ok. Si pour tout $n > 0$, $x \in \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$, alors, avec $n \rightarrow 0$, $x = 0$.

3  Soit $E = \{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$. Peut-on écrire

- $a \in E$
- $\emptyset \in E$
- $a \subset E$
- $\emptyset \subset E$
- $\{a\} \subset E$
- $\{\emptyset\} \subset E$

Solution de 3 :


- oui et c'est vrai.
- oui mais c'est faux.
- Non.
- Oui et c'est vrai.
- Oui et c'est vrai.
- Oui, mais c'est faux.

4  Compléter par $\in, \notin, \subset, \not\subset$:

- $\emptyset \dots \{1, 2, 3\}$.
- $\{1\} \dots \{1, \{1\}\}$.
- $2 \dots \{\{2\}, 3, 0\}$.
- $\{\emptyset\} \dots E$.

Solution de 4 :

- $\emptyset \notin \{1, 2, 3\}$ et $\emptyset \subset \{1, 2, 3\}$.
- $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$ et $\{1\} \subset \{1, \{1\}\}$.
- $2 \notin \{\{2\}, 3, 0\}$. \subset ou $\not\subset$ n'ont aucun sens
- Tout dépend de E pour les quatre.

5  Calculer $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

6 Soient E un ensemble et A, B, C des parties de E . Montrer que

- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $B \setminus A = \overline{A \setminus B}$
- $A = B \iff A \cap B = A \cup B$
- $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$
- $A \subset B \iff A \cup B = B \iff \overline{A} \supset \overline{B} \iff A \cap B = A \iff A \setminus B = \emptyset \iff \overline{A} \cup B = E$

7 **Autour des produits cartésiens**

- Soit $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5\}$ et $C = \{2, 10\}$. Expliciter les produits cartésiens $A \times B$, $B \times A$, $C \times B$, $(A \cap C) \times B$, ainsi que l'ensemble $(A \times B) \cap (C \times B)$. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser le résultat ? Énoncer un résultat analogue avec les symboles \cup et \times .
- Soient les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants : $I = [0, 3]$, $J = [0, 4]$, $K = [1, 4]$, $L = [1, 5]$. Dessiner, dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , les ensembles $I \times J$ et $K \times L$; déterminer $(I \times J) \cap (K \times L)$.
- Pour les ensembles quelconques A, B, C, D , déterminer (en justifiant le résultat) $(A \times B) \cap (C \times D)$.
- Montrer en donnant un contre-exemple, que $(A \times B) \cup (C \times D)$ n'est en général pas un produit cartésien.
- Que vaut $\emptyset \times B$?

6. Résoudre l'équation $A \times B = \emptyset$.

8 ✦ Résoudre, pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$,

1. $X \cup A = B$ 2. $X \cap A = B$ 3. $X \setminus A = B$

9 On définit la différence symétrique Δ sur $\mathcal{P}(E)^2$ par

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
2. Si $A \subset E$, calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$ et $A \Delta \bar{A}$.
3. Justifier que Δ est commutative, puis, à l'aide d'une table de vérité, que Δ est associative.
4. Résoudre l'équation $X \Delta A = B$ d'inconnue X .
On pourra s'intéresser à $B \Delta A$.