0 Bien rédiger en Mathématiques

Il est capital d'apprendre à bien rédiger lorsque l'on souhaite travailler en mathématiques.

La rédaction a plusieurs objectifs :

- d'abord s'assurer que le raisonnement fait est **correct** (une erreur est très facilement repérable dans un raisonnement rigoureux, alors qu'elle l'est beaucoup moins dans une démonstration maladroite souvent signe d'une arnaque, volontaire ou non.)
- et ensuite à pouvoir **communiquer** ce raisonnement et le rendre tout à fait compréhensible.

On s'efforcera alors d'écrire des raisonnements **ordonnés** et, dans la mesure du possible, **élégants**, et surtout (c'est primordial !) à toujours garder une **honnêteté** dans ses démonstrations : la tentative d'arnaque du lecteur (ou du correcteur) est la plupart du temps très facilement décelable et du plus mauvais effet (en particulier sur l'humeur du correcteur pour le reste de la copie).

Si la rédaction en mathématiques présente une liberté certaine, il y a un certain nombre de réflexes à acquérir dès aujourd'hui.

I Bien introduire les objets dont on parle

Il est primordial dans un raisonnement mathématique d'introduire **toutes** les notations et variables/ inconnues utilisées.

1 L'universel...

Si on vous demande de montrer que quelque chose est vrai pour tout élément x (nombre, fonction, vecteur, point, etc.) d'un ensemble E donné, il faut absolument écrire « $\text{Soit } x \in E$ » ou « $\text{Pour tout } x \in E$ » au début du raisonnement.

Par exemple, si on vous demande de montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2+2x+1} = |x+1|$$

n'écrivez pas simplement

$$\cancel{\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|}$$

mais plutôt

> Soit x un nombre réel. On a alors $\sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$.

ou encore

> $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2+2x+1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$.

⚠ **Attention tout de même** : lorsque l'on utilise le symbole ∀, le ou les éléments sont définis **seulement dans la phrase mathématique qui suit**, alors que « $\text{Soit } x$... » vous permet de continuer d'utiliser cet x dans la suite de votre raisonnement.

2 ...et l'existentiel.

★ Lorsque l'on veut travailler avec une expression compliquée, il est bon de lui donner un nom :

> On pose $\lambda = \ldots$

On veillera particulièrement à utiliser une lettre n'ayant pas été utilisée antérieurement pour que tout soit bien clair et où les quantités présentes dans l'expression auront été introduites au préalable.

Dans le même style, il est souvent bien utile de repérer une équation (par $(\star)$, $(\sharp)$, (E), (1), etc. par exemple) pour y faire référence ensuite sans la réécrire entièrement.

★ Il faut faire attention à bien introduire les choses de la manière citée ci-dessus (c'est-à-dire explicitement) et non implicitement. Par exemple, pour appeler θ un angle tel que $\sin\theta = 0{,}75$, on n'écrira pas

~~On pose $\sin\theta = 0{,}75$~~

mais

> Soit/On se donne $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\sin\theta = 0{,}75$

(cela pose d'autant plus problème ici que non seulement le θ était introduit implicitement, mais en plus il y en a plusieurs qui conviennent (en choisit-on un particulier ?).)

★ Plus généralement, on aura besoin d'utiliser « On pose... » lorsqu'il faudra démontrer quelque chose du type « $\exists x \in E, \;\; P(x) \text{ est vraie.}$ » . L'idée est alors, après un certain travail, de poser un x et de montrer qu'il convient (d'où l'existence).

À propos de ce symbole, on fera bien attention à ne pas écrire des choses du type

$\exists\, 0 < i < n \ldots$

mais

$\exists i \in \mathbb{N}, \;\; 0 < i < n \ldots$

★ Une dernière remarque à propos de ces notations : lorsque l'on introduit des quantités avec des indices (par exemple A_k pour $k \in \mathbb{N}$), il est préférable de garder le même nom d'indice (ne pas passer sans raison à A_n), même si formellement c'est équivalent.

II De la cohésion de l'ensemble

1 Pas de mélange de genres

★ On ne mélange jamais phrase en français et symboles ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, etc.). Ces symboles ne sont ni des raccourcis de rédaction ni des abréviations.

On n'écrira pas

$\exists$ y réel tel que $x = y^2$ $\forall$ nombre réel positif x.

Mais

$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \exists y \in \mathbb{R}, \;\; x = y^2$

ou alors

Pour tout nombre réel positif x, il existe un réel y tel que $x = y^2$.

★ On se permet tout de même habituellement d'écrire le symbole $\in$ d'appartenance.

2 Des articulations logiques

★ Toujours relier entre elles les lignes que vous écrivez (et en profiter pour les justifier si nécessaire) : ainsi, si on vous demande de démontrer que $\forall x \in [2,3[, \;\; \ln\left(x^2 - 2\right) \in [\ln 2, \ln 7[$, la rédaction suivante n'est pas correcte

$$\begin{array}{ccccc}
2 & \leqslant & x & < & 3 \\
4 & \leqslant & x^2 & < & 9 \\
2 & \leqslant & x^2 - 2 & < & 7 \\
\ln 2 & \leqslant & \ln\left(x^2 - 2\right) & < & \ln 7
\end{array}$$

Il faut relier les lignes de calcul, comme ceci

Soit $x \in [2,3[$.

Alors	$2 \leqslant x < 3$	
donc	$4 \leqslant x^2 < 9$	par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}^+$,
puis	$2 \leqslant x^2 - 2 < 7$	
d'où	$\ln 2 \leqslant \ln\left(x^2 - 2\right) < \ln 7$	par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

On conclut ainsi que $\boxed{\forall x \in [2,3[, \;\; \ln\left(x^2 - 2\right) \in [\ln 2, \ln 7[}$

★ Il faut être très vigilant lorsque l'on utilise le symbole $\Rightarrow$: en effet, si vous voulez démontrer qu'une propriété Q est vraie en utilisant une propriété connue P écrire $P \Rightarrow Q$ **ne suffit pas**. Retenez que ce symbole ne se traduit pas par « ce qui implique que » mais seulement « implique ».

Supposons par exemple que vous vouliez démontrer que $\ln 2 < \ln 3$ en utilisant la stricte croissance de la fonction $\ln$, écrire

la fonction $\ln$ est strictement croissante $\Rightarrow \ln 2 < \ln 3$

ne suffit pas, car cela signifie :

si la fonction $\ln$ est strictement croissante, **alors** $\ln 2 < \ln 3$.

(ce qui est par ailleurs vrai, mais ne répond pas à la question).

Pour que cela soit correct, il faudrait préciser que la fonction $\ln$ est strictement croissante :

> On sait que la fonction $\ln$ est strictement croissante et que
>
> la fonction $\ln$ est strictement croissante $\Rightarrow \ln 2 < \ln 3$
>
> donc $\ln 2 < \ln 3$.

Ce qui présente une certaine lourdeur !

Le plus simple pour éviter ces ambiguïtés, est d'utiliser des adverbes (comme, donc, d'où, ainsi, par suite, etc.) au lieu de ce symbole :

> la fonction $\ln$ est strictement croissante donc $\ln 2 < \ln 3$.

3 Attention à ce dont on parle : ensembles et fonctions

★ Il faut toujours rester vigilant à la cohérence de ce que l'on écrit, un exemple typique étant l'appartenance et l'inclusion : un objet **appartient** à un ensemble d'objets semblables, et un ensemble est **inclus** dans un autre ensemble du même type. Ainsi, on écrit $\pi \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et non l'inverse.

★ Dans la même catégorie, il y a le cas des fonctions. Il faut être bien conscient de la différence entre une fonction f et son expression $f(x)$ en x. On parle ainsi de monotonie, de continuité, de dérivabilité la *fonction* f et non de son *expression* $f(x)$.

★ Pour parler de la dérivée de f, on écrit f' (et $f'(x)$ sa valeur en x) et surtout pas $\cancel{(f(x))'}$ ($f(x)$ est un nombre, $(f(x))' = 0$!). Par exemple, il est incorrect d'écrire

> ~~$(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$~~

et encore plus d'écrire (qui a un sens mathématique mais qui est faux !)

> ~~$\sin'(2x) = 2\cos(2x)$.~~

Le mieux pour éviter d'être tenté est de renommer la fonction à dériver :

> Soit $f : x \mapsto \sin(2x)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\cos(2x)$.

(on remarquera que $f'(x) \neq \sin'(2x)$!)

★ N'oubliez pas que, pour une fonction, être continue, dérivable, croissante, etc. ne veut rien dire : on l'est **sur un ensemble**. Par exemple, on n'écrit pas

> ~~$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue~~

ni

> ~~$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}^+$~~

mais

> $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

★ On vous demande également en ce début de sup d'éviter à tout prix le recours à la notation $\lim\limits_{x \to x_0} \ldots$. Pourquoi, alors que vous l'avez toujours utilisée jusqu'ici ? La manipulation de limites n'est pas aussi simple que ce qu'on a pu vous faire « croire », comme on le verra dans le chapitre sur les limites. Une des difficultés est en général de prouver l'existence d'une limite pour pouvoir travailler avec. Une fois cette tâche plus ou moins aisée accomplie, on peut manipuler les limites et utiliser la notation $\lim\limits_{x \to x_0} \ldots$. Mais avez-vous l'habitude de prouver leur existence avant de manipuler les limites ? Non. Comment faire ? Au lieu d'écrire, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, vous écrirez plutôt $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$ ce qui signifie « la limite existe et vaut ℓ. »

4 Annoncer ce que l'on fait

★ Afin d'avoir une présentation claire et (surtout) de pouvoir avancer de manière correcte dans un raisonnement, il est très important de toujours citer clairement ses hypothèses (Supposons..., Soit...) et ce qu'on cherche à démontrer (But :..., Montrons que...)

★ Lorsque l'on cite un théorème, on doit vérifier **toutes** ses hypothèses : non seulement pour assurer votre correcteur de la bonne connaissance de celles-ci, mais aussi pour être sûr que le théorème en question s'applique bien (par exemple, pour utiliser le théorème de Pythagore, il faut dire quelque part que le triangle dans lequel on travaille est bien rectangle...)

5 Des notations classiques

★ Ne cherchez pas à introduire des notations farfelues lorsqu'il en existe des conventionnelles. Qui aurait idée de noter autrement que $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels ?

Généralement, on réserve les dernières lettres de l'alphabet $(x, y, z, \ldots)$ pour les inconnues et les premières $(a, b, c, \ldots)$ pour les constantes (comme le proposa initialement Descartes).

Cependant, lorsque vous utilisez des symboles ayant des significations habituelles, il faut tout de même les introduire. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^2+5x+4=0$, on n'écrit pas

~~$\Delta = 25-16 = 9$ donc $S = \{-4, -1\}$~~

mais

> Le discriminant de l'équation est $\Delta = 25-16 = 9$, l'ensemble des solutions est donc $S = \{-4, -1\}$

III Le cas bien particulier de la récurrence

★ Nous verrons dans le chapitre sur les entiers le principe de récurrence et la rédaction à adopter avec celle-ci : hypothèse de récurrence, initialisation, hérédité, conclusion. Ne négligez pas la rédaction d'une récurrence, et particulièrement si c'est la première d'un sujet : on vous attend au tournant ! La formulation de l'hypothèse de récurrence est particulièrement regardée.

★ On n'écrit pas dans une copie « on a, par une récurrence immédiate,... » ou « par récurrence facile... » car on vous rétorquera qu'alors, si c'est immédiat ou facile, pourquoi ne pas la faire ? Dans ce cas, soit on la fait (surtout si c'est la question posée et/ou si c'est au début d'un sujet), soit on écrit simplement « on a, par récurrence,... » si on estime que la question ne se concentre pas sur cette récurrence.

IV Une présentation propre et attrayante

1 Présentation générale

★ Il faudra, à l'écrit, laisser des **marges suffisamment larges**, **encadrer ses résultats**, **tirer des traits entre les questions**.

2 De l'importance des figures

★ Vous pouvez illustrer vos raisonnements avec des figures. Même si ce n'est pas demandé, une illustration graphique est bien souvent utile pour éclaircir un raisonnement, et particulièrement en géométrie.

3 Quelle personne ?

★ Lorsque l'on rédige des Mathématiques, l'emploi de la troisième personne du singulier (on) ou de la première personne du pluriel (nous) est largement recommandé, étant donné que vous incluez le lecteur dans votre discours (« Vous et moi, nous pouvons voir que...»). La première personne du singulier (je) doit être réservée à des remarques personnelles.

★ D'ailleurs, il vaut mieux savoir qu'« on résou**t** ».

★ Il n'y a, finalement, pas « une » rédaction parfaite : chacun peut y mettre son style, tant que ce qui est fait est juste et intelligible, mais il est important d'acquérir dès le départ les bons automatismes.

V L'alphabet grec

À connaître parfaitement dès aujourd'hui !!! Utiles aussi : le S et le A gothique : $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{A}$ et la lettre nabla : ∇.

Min.	Maj.	Prononc.	Corresp.
α	A	Alpha	a
β	B	Bêta	b
γ	Γ	Gamma	g
δ	Δ	Delta	d
ϵ ou ε	E	Epsilon	e
ζ	Z	Dzêta	z
η	H	Êta	ê
θ ou ϑ	Θ	Thêta	th
ι	I	Iota	i
κ ou $\varkappa$	K	Kappa	k
λ	Λ	Lambda	l
μ	M	Mu	m

Min.	Maj.	Prononc.	Corresp.
ν	N	Nu	n
ξ	Ξ	Xi	x
o	O	Omicron	o
π ou ϖ	Π	Pi	p
ρ ou ϱ	P	Rhô	r
σ ou ς	Σ	Sigma	s
τ	T	Tau	t
υ	Y	Upsilon	u
ϕ ou φ	Φ	Phi	ph
χ	X	Khi	kh
ψ	Ψ	Psi	ps
ω	Ω	Omega	ô