chapitre IV

Trigonométrie

I Fonctions cos, sin

1 Définition

Les fonctions circulaires *cosinus*, *sinus* et *tangente* sont définies géométriquement, dans un repère orthonormal direct $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$ du plan (voir la figure ci-après).

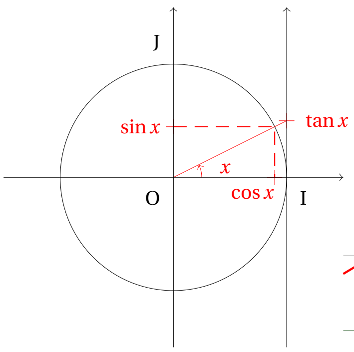

Figure 1 – Définition géométrique de *cosinus*, *sinus* et *tangente*

Propriété

$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2 Propriétés

Valeurs particulières :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

Propriété

Si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*,*

$$\sin x = \sin y \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \equiv y\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y\ [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\quad x = y + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - y + 2k\pi$$

$$\cos x = \cos y \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \equiv y\ [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y\ [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\quad x = y + 2k\pi \text{ ou } x = -y + 2k\pi$$

y	$-x$	$\pi/2 - x$	$\pi/2 + x$	$\pi - x$	$\pi + x$
$\cos y$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$
$\sin y$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$

Propriétés

(i) *Les fonctions sinus et cosinus sont définies, continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. De plus, sinus est impaire et cosinus est paire.*

(ii) *Si* $a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ *et* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

(iii) $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$

(iv) $\sin$ *et* $\cos$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$.

(v) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant 1$ *et* $|\cos x| \leqslant 1$ *(*$\cos$ *et* $\sin$ *sont dites bornées par 1).*

(vi) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

3 Graphes

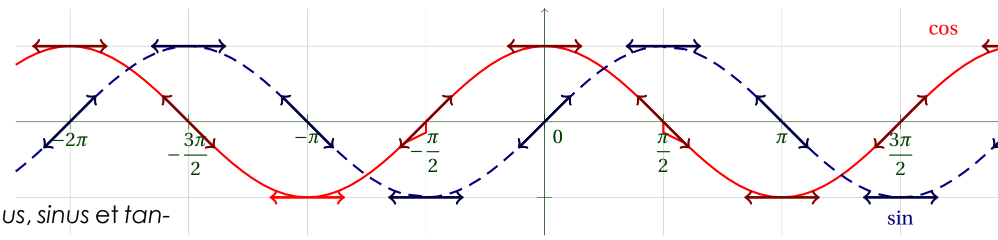

Figure 2 – Graphes des fonctions *cosinus* et *sinus*

II Fonction tan

1 Définition

Définition : Tangente

La fonction ***tangente*** est l'application

$$\tan : \left| \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array} \right.$$

définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 Propriétés

Propriétés

(i) *La fonction tangente est continue, dérivable et π-périodique sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(ii) *C'est une fonction impaire.*

(iii) $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

(iv) *La fonction tangente n'est pas bornée :* $\tan x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^+]{} -\infty$ *et* $\tan x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$.

(v) $\dfrac{\tan x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

Valeurs particulières :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

3 Graphe

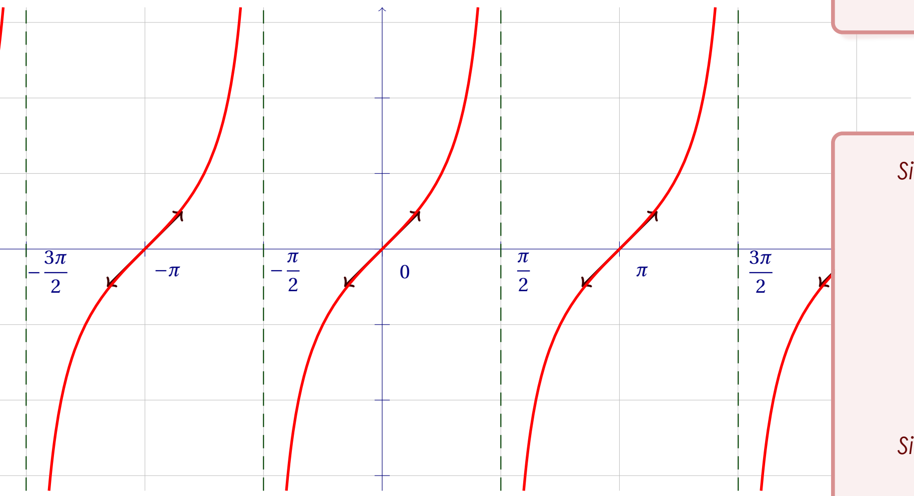

Figure 3 – Graphe de la fonction tangente

Propriété

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \ x = y + k\pi$$

III Trigonométrie

Propriété : Formules d'addition

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad (1)$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad (2)$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad (3)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \qquad (4)$$

Si, de plus, $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *ainsi que* $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *pour la première et* $a-b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *pour la seconde,*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \qquad (5)$$

Propriété : Formules de duplication

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

et donc

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Si, de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ *et* $x \not\equiv \frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Propriété : Linéarisation et factorisation

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big)$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

Si $(p, q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Propriété : Arc moitié

Soit $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. *On pose* $t = \tan\frac{x}{2}$, *alors*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Propriété

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. *Il existe des réels* φ, ψ *tels que* $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\psi).$$