chapitre V
Nombres complexes

I Le corps $\mathbb{C}$

1 Une construction de $\mathbb{C}$

Définition

On note $\mathbb{C} = \{z = x + \mathrm{i}y,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ où $\mathrm{i}^2 = -1$.
Pour $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, avec $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, on pose

$$z + z' = (x + x') + \mathrm{i}(y + y')$$
$$z \times z' = (xx' - yy') + \mathrm{i}(xy' + x'y)$$

Propriétés

(i) *La loi + est* ***associative*** *:*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\ \left(z + z'\right) + z'' = z + \left(z' + z''\right)$$

et ***commutative*** *:*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ z + z' = z' + z.$$

(ii) *La loi × est* ***associative*** *:*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\ \left(z \times z'\right) \times z'' = z \times \left(z' \times z''\right),$$

commutative *:*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C},\ z \times z' = z' \times z$$

et ***distributive*** *sur la loi + :*

$$\forall z, z', z'' \in \mathbb{C},\ z \times \left(z' + z''\right) = z \times z' + z \times z''.$$

(iii) 0 *est un* ***élément neutre*** *de + sur* $\mathbb{C}$ *:* $\forall z \in \mathbb{C},\ z + 0 = 0 + z = z.$

(iv) 1 *est un* ***élément neutre*** *de × sur* $\mathbb{C}$ *:* $\forall z \in \mathbb{C},\ z \times 1 = 1 \times z = z.$

(v) *Tout élément est* ***symétrisable*** *pour la loi + :*

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists! z' \in \mathbb{C},\ z + z' = 0.$$

On note alors $z' = -z$.

(vi) *Tout élément non nul est* ***symétrisable*** *pour la loi × :*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \exists! z'' \in \mathbb{C},\ z \times z'' = 1.$$

On note alors $z'' = z^{-1} = \frac{1}{z}$.

Corollaire

On dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ *est un* ***corps commutatif****, appelé* ***corps des complexes****.*

Propriété

Vu les propriétés précédentes semblables à celles connues sur $\mathbb{R}$*, les formules de* $\sum_{k=0}^{n} x^k$*, de factorisation de* $a^n - b^n$ *et du binôme de Newton restent valables dans* $\mathbb{C}$*.*

2 Partie réelle, partie imaginaire

Définition : Parties réelles et imaginaires

Soit z un élément de $\mathbb{C}$, x et y des réels tels que $z = x + \mathrm{i}y$.
On appelle **partie réelle** de z, notée $\mathfrak{Re}\, z$, le nombre x, et **partie imaginaire** de z, notée $\mathfrak{Im}\, z$ le nombre y.

Propriété

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Propriété : Linéarité de $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$

Si $z, z' \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathfrak{Re}(z + z') = \mathfrak{Re}\, z + \mathfrak{Re}\, z' \text{ et } \mathfrak{Re}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Re}\, z$$

et

$$\mathfrak{Im}(z + z') = \mathfrak{Im}\, z + \mathfrak{Im}\, z' \text{ et } \mathfrak{Im}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Im}\, z$$

3 Affixe

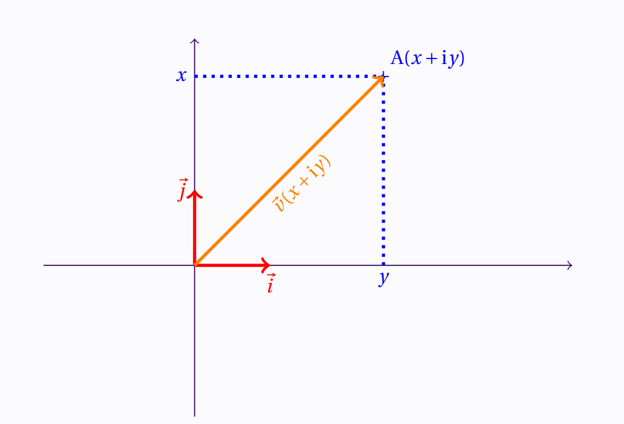
On se fixe pour le reste du chapitre un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$

Propriété

On peut identifier le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$ *avec le point de coordonnées* (x, y) *dans le repère fixé du plan.*
On dit que $x + \mathrm{i}y$ *est* ***l'affixe*** *du point de coordonnées* (x, y)*, ou encore ce point est l'****image*** *dans* $\mathbb{R}^2$ *du nombre complexe* $x + \mathrm{i}y$*.*

Illustration

A est le point de coordonnées (x, y), d'affixe $x + \mathrm{i}y$.



4 Conjugaison

Définition : Conjugué

Soit $z \in \mathbb{C}$, et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes.

(i) $\overline{\overline{z}} = z$

(ii) $\begin{cases} \mathfrak{Re}\, z = \dfrac{z+\overline{z}}{2} \\ \mathfrak{Im}\, z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i} \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}\, z = 0 \iff z = \overline{z} \\ z \in i\mathbb{R} \iff \mathfrak{Re}\, z = 0 \iff z = -\overline{z} \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} \overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\ \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \end{cases}$

(v) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

(vi) $z\overline{z} = (\mathfrak{Re}\, z)^2 + (\mathfrak{Im}\, z)^2$

5 Module d'un nombre complexe

Définition : Module

Soit z un nombre complexe, on définit le module de z par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(\mathfrak{Re}\, z)^2 + (\mathfrak{Im}\, z)^2}$$

Propriétés

Soient z et z' des nombres complexes.

(i) $|z|$ *est la distance, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal direct, entre l'origine O et le point d'affixe z.*
$|z - z'|$ *est la distance entre le point d'affixe z et celui d'affixe z'.*

(ii) $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

(iii) $\begin{cases} |\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z| & \text{avec égalité ssi } z \in \mathbb{R} \\ |\mathfrak{Im}(z)| \leqslant |z| & \text{avec égalité ssi } z \in i\mathbb{R} \end{cases}$

(iv) $|z| = 0 \iff z = 0$

(v) $|zz'| = |z|\,|z'|$

(vi) Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$

Corollaire : de la propriété (v)

*Si z est un nombre complexe, et $k \in \mathbb{N}$, $\left|z^k\right| = |z|^k$.
Si $z \neq 0$, c'est encore valable pour $k \in \mathbb{Z}$.*

Propriété : Inégalités triangulaires

*Soient z et z' deux nombres complexes.
Alors*

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|$$

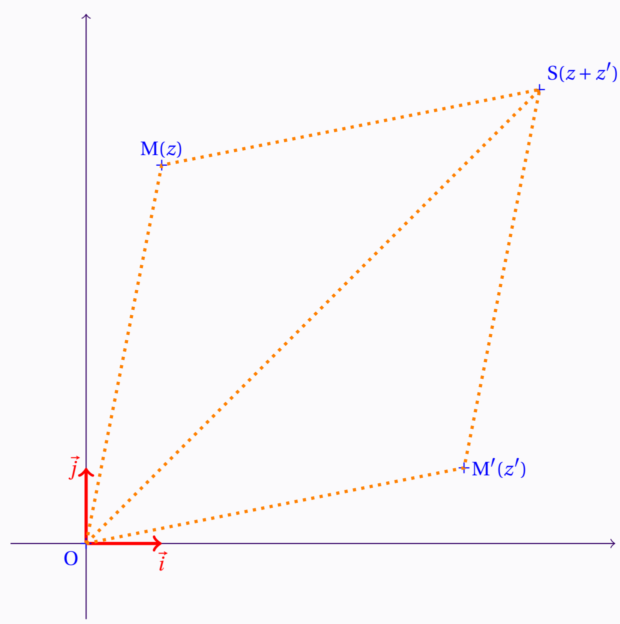
Cas d'égalité :

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff z = 0 \text{ ou } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ z' = \lambda z$$

*On dit alors que z et z' sont **positivement liés**.*

Illustration : géométrique

Soit, dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points M, M' et S d'affixe respective z, z' et $z + z'$.
On a alors $OS \leqslant OM + OM'$.



Propriété

Soient $c \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$. On note C l'image de c dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal direct.

L'ensemble des images des nombres complexes z tels que

- *$|z-c| = r$ est le cercle de centre C et de rayon r.*
- *$|z-c| \leqslant r$ est le disque fermé de centre C et de rayon r.*
- *$|z-c| < r$ est le disque ouvert de centre C et de rayon r.*

6 Nombres complexes de module 1

Notation

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Propriété

$$\forall z, z' \in \mathbb{U}, \quad z \times z' \in \mathbb{U}$$

II Exponentielle complexe, argument

1 Exponentielle d'un imaginaire pur

Notation : Notation d'Euler[1]

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Propriété

(i) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$.

(ii) $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} &\iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad \theta = \theta' + 2k\pi \end{aligned}$$

Propriété

$$\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ ; \ \theta \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ ; \ \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

Propriétés

(i) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$

(ii) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = 1$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$; $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})$

(iii) *Si* $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{ik\pi} = (-1)^k$.

2 Formules d'Euler et de Moivre

Propriété : Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

Propriété : Formule de De Moivre[2]

Soient $k \in \mathbb{Z}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right)^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$$

i.e.

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$$

Méthode

Calculs à savoir refaire : si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{y-x}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{y-x}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{y-x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+y}{2}}$$

Cas particulier :

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} \qquad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = -2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$$

3 Forme trigonométrique et arguments d'un nombre complexe

Propriété : Écriture trigonométrique

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre réel θ tel que $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, écriture de la forme $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_*^+$.

Définition

θ est appelé un argument de z, noté $\arg z$ uniquement défini modulo 2π.

Parmi les différents arguments possibles celui dans $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal (parfois noté Arg).

Propriété

Soient r, r' deux nombres réels strictement positifs et θ, θ' deux nombres réels,

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \begin{cases} r &= r' \\ \theta &\equiv \theta' \ [2\pi] \end{cases}$$

En particulier, si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$, r est unique (et vaut $|z|$) et θ est « unique modulo 2π ».

Propriété

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls,

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$$

4 Exponentielle d'un nombre complexe

Définition : Exponentielle d'un nombre complexe

Si $z \in \mathbb{C}$, et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + \mathrm{i}y$, on pose

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Propriété

(i) $\exp : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array} \right.$ *morphisme de groupe, i.e.*

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}$$

(ii) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (\mathrm{e}^z)^k = \mathrm{e}^{kz}$

(iv) En particulier, $\forall z \in \mathbb{Z}, \quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$

Méthode : Équation $\mathrm{e}^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Pour résoudre l'équation $\mathrm{e}^z = a$, on met a sous forme trigonométrique et z sous forme algébrique.

$\mathrm{e}^z = a \iff a = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ i.e. $|a| = \mathrm{e}^x$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \dfrac{a}{|a|}$.

Les solutions sont les nombres complexes $z = x + \mathrm{i}y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = \ln|a|$ et y est un argument de a.

Corollaire

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z - z' \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$$

III Racines des nombres complexes et résolution de trinômes du second degré

1 Factorisation de polynôme

Propriété

Si $P : z \mapsto P(z)$ est une fonction polynomiale à cœfficients complexes, alors $a \in \mathbb{C}$ est racine de P (ie $P(a) = 0$) si et seulement s'il existe $Q : z \mapsto Q(z)$ est une fonction polynomiale tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$.

2 Racines carrées des nombres complexes

Définition : Racine carrée

Soit a un nombre complexe. z est une **racine carré** de a si et seulement si $z^2 = a$.

Propriété

Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées complexes opposées.

Si a s'écrit $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sous forme trigonométriques, il s'agit de $\pm\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Méthode : Déterminer la forme cartésienne des racines

Si $z = a + \mathrm{i}y$ où $(a,b \in \mathbb{R})$, le nombre complexe $\alpha + \mathrm{i}\beta$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ est une racine carrée de z si et seulement si $\left\{ \begin{array}{ccc} \alpha^2 - \beta^2 & = & a \\ 2\alpha\beta & = & b \end{array} \right.$

Il faut de plus avoir $|z| = |a + \mathrm{i}y| = |\alpha + \mathrm{i}\beta|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, d'où

$$\alpha^2 = \frac{|z| + a}{2} \quad \text{et} \quad \beta^2 = \frac{|z| - a}{2}$$

Cela fixe $|\alpha|$ et $|\beta|$. Leurs signes sont donnés par la relation $2\alpha\beta = b$.

3 Équations du second degré

Théorème

Soit l'équation du second degré, d'inconnue z, $az^2 + bz + c = 0$ où $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

On définit le discriminant de l'équation $\Delta = b^2 - 4ac$.

On a alors deux cas possibles :

1) Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution qui vaut $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et alors $az^2 + bz + c = 0 = a(z - z_0)^2$.

*2) Si $\Delta \neq 0$, on note δ **une** racine de Δ. Il y a deux solutions distinctes : $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et alors $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.*

Propriété : Relations cœfficients racines

Soient $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et z_1, z_2 les racines de $az^2 + bz + c$ (éventuellement confondues).

Alors $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

4 Racines $n^{\text{èmes}}$

a Définition

Définition : Racines $n^{\text{èmes}}$

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle **racine** $n^{\text{ème}}$ de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

b Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre 1 a exactement n racines n^{mes}, appelées racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité. On note $\mathbb{U}_n$ leur ensemble, et on a

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!] \right\} \subset \mathbb{U}$$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. La somme des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité est nulle, i.e. $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$.

Propriété

La racine cubique $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ de l'unité vérifie $j^3 = 1$, $j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.

c Racines n^e d'un nombre complexe

Méthode : Déterminer les racines n^e d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$

- Trouver une solution particulière z_0 (par exemple, si $a = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $z_0 = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}}$ convient).
- Se ramener aux racines n^e de l'unité.

$$z^n = a \Longleftrightarrow z^n = z_0^n \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$$
$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \ \frac{z}{z_0} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$
$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \ z = z_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout nombre complexe a non nul a exactement n racines n^e distinctes.

IV Nombres complexes et géométrie plane

On a vu que dans le plan complexe identifié au plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, un point M est repéré par son affixe z, qui est également l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$. $|z|$ est la distance OM et les différents argument de $z \neq 0$ sont les mesures de l'angle $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

1 Premiers résultats

Propriété

Soit M d'affixe $z \in \mathbb{C}$

(i) $M \in (Ox) \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(ii) $M \in (Oy) \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

(iii) $M \in \mathscr{C}(O, 1) \Longleftrightarrow z \in \mathbb{U}$

Propriété

Si M est le point d'affixe z et M′ le point d'affixe z', l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $z' - z$ et $MM' = \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| = |z' - z|$.

Propriété

Soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

(i) Si $t \in \mathbb{C}$ affixe de $\vec{v}$. Le point M_1 d'affixe $z + t$ est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{v}$.

(ii) Le point M_2 d'affixe $\bar{z}$ est l'image de M par la symétrie d'axe (Ox).

(iii) Le point M_3 d'affixe $-\bar{z}$ est l'image de M par la symétrie d'axe (Oy).

(iv) Le point M_4 d'affixe $-z$ est l'image de M par la symétrie de centre O.

Propriété

Soient A et B des points du plan d'affixe respective des nombres complexes a et b, et C un point d'affixe c, distinct de A et B.
$\frac{a-c}{b-c}$ a pour module $\frac{CA}{CB}$ et pour argument une mesure de $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$.

Corollaire

Les points distincts A, B, C d'affixes respectives a, b, c

- *sont alignés si et seulement si $\frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$*
- *sont tels que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ si et seulement si $\frac{a-c}{b-c} \in i\mathbb{R}$*

2 Similitudes

Définition : Rotations, homothétie

- On appelle **rotation** de centre le point Ω et d'angle de mesure $\theta \in \mathbb{R}$ la transformation du plan qui envoie un point M sur le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.
- On appelle **homothétie** de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ et de centre le point Ω la transformation du plan qui envoie un point M sur le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$.

Propriété

Soient Ω d'affixe z_0, $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

- *L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ est*

$$r_{\Omega,\theta}(z) = e^{i\theta}(z - z_0) + z_0.$$

- *L'écriture complexe de l'homothétie de rapport k et de centre Ω est*

$$h_{\Omega,k}(z) = k(z - z_0) + z_0.$$

Corollaire

*Par composition des propriétés précédentes, l'application $z \mapsto az$ où $a \in \mathbb{C}^*$ est l'écriture complexe la composée **commutative** de*

- *l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$*
- *et de la rotation de centre O et d'angle $\arg a$.*

Définition

On appelle **similitude du plan** toute application φ du plan telle qu'on puisse trouver $k \in \mathbb{R}^*$ vérifiant

$$\forall (M, M') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\quad \left\|\overrightarrow{\varphi(M)\varphi(M')}\right\| = k\left\|\overrightarrow{MM'}\right\|.$$

Propriété

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

L'application $f : z \mapsto az + b$ est l'écriture complexe d'une similitude de rapport $|a|$.

Propriété

Soient $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $f : z \mapsto az + b$.

- *Si $a = 1$ et $b = 0$, alors $f = \mathrm{id}$;*
- *si $a = 1$ et $b \neq 0$, alors f est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b;*
- *si $a \neq 1$, il existe un unique point fixé par f i.e. un unique $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $f(z_0) = z_0$, et f est la composée **commutative** de*
  - ⋆ *$r_{\Omega,\arg a}$ écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(z_0)$ et d'angle $\arg a$,*
  - ⋆ *et de $h_{\Omega,|a|}$ écriture complexe de l'homothétie de centre $\Omega(z_0)$ et de rapport $|a|$.*

  Ainsi,

$$f = r_{\Omega,\arg a} \circ h_{\Omega,|a|} = h_{\Omega,|a|} \circ r_{\Omega,\arg a}$$