

chapitre VI

Calculs en analyse

Fonctions numériques (réelles ou complexes) d'une variable réelle

1 Généralités sur les fonctions

a Définition, graphe

Définition

L'**ensemble de définition** d'une fonction f est l'ensemble des x pour lesquels $f(x)$ a bien un sens. On le note souvent \mathcal{D}_f .

La **représentation graphique** (ou **graphe**) d'une fonction f à valeurs réelles est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour x dans l'ensemble de définition de f . On la note souvent Γ_f ou \mathcal{C}_f .

Effet sur le graphe de transformations

- $f_1 : x \mapsto f(x+a)$:
 $(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x) \iff y = f_1(x-a) \iff (x-a, y) \in \mathcal{C}_{f_1}$.
 Le graphe de f_1 se déduit de celui de f par une **translation** horizontale d'amplitude $-a$.
- $f_2 : x \mapsto f(ax)$ (avec $a \neq 0$) :
 $(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff y = f(x) \iff y = f_2(x/a) \iff (x/a, y) \in \mathcal{C}_{f_2}$.
 Le graphe de f_2 se déduit de celui de f par une **affinité orthogonale horizontale** de rapport $\frac{1}{a}$.

b Parité, périodicité

Définition : Parité, périodicité

Si D est une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction,

- f est dite **paire** si

$$\forall x \in D, \quad (-x \in D \text{ et } f(-x) = f(x))$$

- f est dite **impaire** si

$$\forall x \in D, \quad (-x \in D \text{ et } f(-x) = -f(x))$$

- f est dite **T -périodique** avec $T \in \mathbb{R}^*$ si

$$\forall x \in D, \quad (x+T \in D \text{ et } f(x+T) = f(x))$$

Propriété

- Une fonction est paire sur D si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Il suffit alors de l'étudier sur $D \cap \mathbb{R}_*^+$.
- Une fonction est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine.
Il suffit alors de l'étudier sur $D \cap \mathbb{R}_*^+$.

(iii) Une fonction est T -périodique si et seulement si son graphe est invariant par translation horizontale d'amplitude T .

Il suffit alors de l'étudier sur $D \cap I$ où I est n'importe quel intervalle d'amplitude T .

(iv) Toute combinaison linéaire de fonction paire, impaire ou T -périodique l'est encore.

c Somme, produit, composée

Définition : Somme, produit

Si $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, on peut définir $f+g : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \times g : D \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in D, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

Définition : Composée

Si $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $u : D_u \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $u(D_u) \subset D_f$ c'est-à-dire $\forall x \in D_u, u(x) \in D_f$, on peut définir la composée de f et u par $f \circ u : D_u \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in D, \quad f \circ u(x) = f(u(x))$$

On représente souvent la composition par un diagramme du type

$$x \in D_u \xrightarrow{u} u(x) \in D_f \xrightarrow{f} f \circ u(x).$$

d Monotonie

Définition : Monotonie

Si D est une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction,

- f est dite **croissante** (respectivement **strictement croissante**) sur D si

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$$

(respectivement $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$)

- f est dite **décroissante** (respectivement **strictement décroissante**) sur D si

$$\forall (x, y) \in D^2, \quad (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$$

(respectivement $\forall (x, y) \in D^2, \quad (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$)

- Lorsque f est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante), on dit qu'elle est **monotone** (respectivement **strictement monotone**).

e Fonctions majorées et minorées

Définition : Caractère majoré, minoré, borné

Si D est une partie de \mathbb{R} et $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction,

- f est dite **majorée** lorsque l'on peut trouver un réel M tel que $\forall x \in D, f(x) \leq M$.
- f est dite **minorée** lorsque l'on peut trouver un réel m tel que $\forall x \in D, m \leq f(x)$.



- f est dite **bornée**, lorsqu'elle est à la fois mino-rée et majorée.

Cela revient à avoir les mêmes propriétés pour la partie $\text{Im } f = \{f(x), x \in D\}$ de \mathbb{R} appelée **image** de f .

Propriété

Une fonction f est bornée ssi $|f|$ majorée ssi on a $K \geq 0$ tel que $|f| \leq K$.

2 Fonctions bijectives

Définition : bijection, réciproque

Soit f une fonction définie sur une partie I de \mathbb{R} et à valeur dans une partie J de \mathbb{R} .
 On dit que f est une bijection (de I sur J) lorsque pour tout y dans J , il existe un unique x dans I tel que $y = f(x)$.
 L'unique x solution de l'équation $f(x) = y$ dépend de y et est noté $f^{-1}(y)$, ce qui définit, une fonction $f^{-1} : J \rightarrow I$ appelée **réciproque** de f .

Théorème : dit « de la bijection »

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $I = [a, b] \subset D$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).
 On suppose que
H1 f **continue** sur I
H2 f **strictement monotone** sur I
 Alors
C1 Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution : on dit aussi que f **réalise (ou induit) une bijection de $I = [a, b]$ sur $J = f(I)$** où
 • $J = [f(a), f(b)]$ si f est croissante,
 • $J = [f(b), f(a)]$ si f est décroissante.
C2 La réciproque est de plus continue sur J ,
C3 et de même monotonie que f .

3 Dérivation

Définition : Dérivabilité en un point, sur un intervalle

f est dite **dérivable** en un point x_0 de son domaine de définition lorsque le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$.
 Cette limite est alors notée $f'(x_0)$.
 On dit que f est **dérivable** sur l'intervalle I lorsqu'elle l'est sur tout point de I . Cela permet de noter f' la fonction dérivée, avec pour tout $x \in I$,
 $f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x))$.

Propriété : Équation de la tangente

Si une fonction f est dérivable en un point x_0 , sa courbe représentative admet une tangente d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Propriété

Si f et g sont dérivables sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$, λf , $f \times g$ le sont aussi et si de plus g ne s'annule pas sur I , $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ le sont aussi et

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
 Si de plus u dérivable sur J et $u(J) \subset I$, $f \circ u$ est dérivable sur J et $(f \circ u)' = u' \times (f' \circ u)$
 (ie $\forall x \in I, (f \circ u)'(x) = u'(x)f'(u(x)).$)

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur une **intervalle** I .
 (i) Si $f' \equiv 0$ sur I , f est constante sur I .
 (ii) Si $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I , f est croissante (resp. décroissante) sur I .
 (iii) Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en des points **isolés** où elle peut s'annuler, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I .

Propriété : Dérivée de la réciproque

Soit $f : I \rightarrow J$ telle que
H1 f est une fonction bijective
H2 f est dérivable sur I
H3 f' **ne s'annule pas** sur I
 alors
C1 f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$
C2 $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$
 Si pour un $x \in I$, $f'(x) = 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en $f(x)$ et la courbe représentative de f^{-1} admet en $f(x)$ une tangente verticale.

4 Dérivée d'ordre supérieur

Définition

Lorsqu'elle existe, on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois de suite la fonction f .

5 Classes \mathcal{C}^1 et \mathcal{C}^∞

Définition

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^0 sur un intervalle I si f est continue sur I .

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I si f est dérivable sur I et f' est continue sur I .

Une fonction f est dite de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle I si est n fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On note $\mathcal{C}^0(I)$, $\mathcal{C}^1(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$ les ensembles de telles fonctions.

6 Asymptotes et branches infinies (HP ?)



Asymptotes horizontales et verticales

Une droite est asymptote lorsque la courbe représentative de la fonction f tend à se rapprocher de celle-ci.

Propriété

Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ pour $x \rightarrow x_0$, la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .
- (ii) Si $f(x) \rightarrow y_0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$, la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f .



Cas général au voisinage de $\pm\infty$

La courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f en $\pm\infty$ lorsque $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$. Le signe de $f(x) - g(x)$ permet de connaître la position relative des deux courbes.

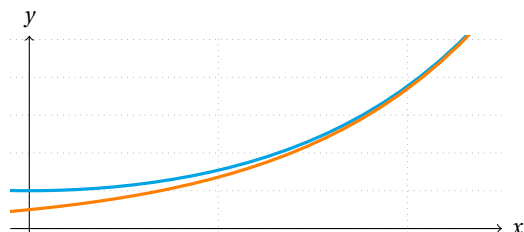


Figure 1 – Courbes asymptotes en $+\infty$



Méthode : détermination de branches infinies

Les limites sont prises pour $x \rightarrow \pm\infty$ et on suppose que $f(x) \rightarrow \pm\infty$.

- (i) Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a$ et $f(x) - ax \rightarrow b$, la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de f .
- (ii) Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ mais $f(x) - ax$ n'a pas de limite finie, on a une **branche parabolique de direction** $y = ax$ (mais on ne se rapproche pas d'une droite en particulier.).
- (iii) Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow \pm\infty$, la courbe a tendance à être plutôt verticale : on parle de **branche parabolique verticale** (mais on ne se rapproche pas d'une droite en particulier.)
Exemple : $\exp, x \mapsto x^2$.

- (iv) Si $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0$, la courbe a tendance à être plutôt horizontale : on parle de **branche parabolique horizontale** (mais on ne se rapproche pas d'une droite en particulier.)
Exemple : \sqrt{x}, \ln .

7 Étude de fonctions

Pour étudier une fonction, il faut :

- Déterminer son domaine de définition.
- Réduire le domaine d'étude par périodicité, (im)parité, etc.
- Étudier la dérivabilité, calculer la dérivée, **la factoriser** pour avoir son signe.
- Dresser le tableau des variations.
- Calculer les limites aux bornes.
- Étudier les branches infinies, asymptotes.
- Tracer le graphe.



Fonctions usuelles

1 Fonction exponentielle

Définition

On appelle fonction exponentielle l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} , vérifiant :

$$\exp' = \exp \text{ et } \exp(0) = 1$$

Définition

On pose $e = \exp 1$.

Propriété

- (i) \exp est continue, dérivable sur \mathbb{R} , $\exp' = \exp$.
- (ii) $\exp > 0$, \exp est convexe sur \mathbb{R} .
- (iii) \exp est strictement croissante.
- (iv) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp x \exp y$.
- (v) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n,$

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp x_i.$$

- (vi) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.
- (vii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$.
- (viii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp x \geq x + 1$.
- (ix) $\exp x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \exp x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$
 $\frac{\exp x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, x \exp x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp' = \exp$		$+$	$+$
\exp	0	1	$+\infty$
infos	ASH $y = 0$		BPV



$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc branche parabolique verticale en $+\infty$.

L'inégalité $\exp x \geq x + 1$ se traduit sur le graphe par le fait que la courbe est au-dessus de la tangente en 0.

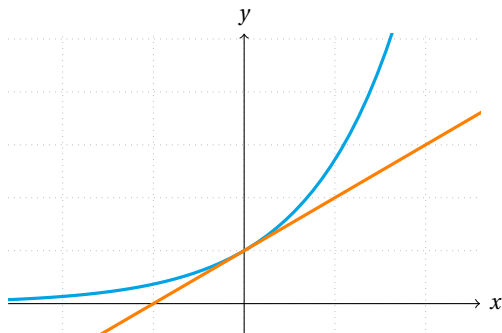


Figure 2 – Graphe de la fonction exponentielle et sa tangente en 0 d'équation $y = x + 1$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

Le graphe est symétrique de celui de l'exponentielle par rapport à la première bissectrice.

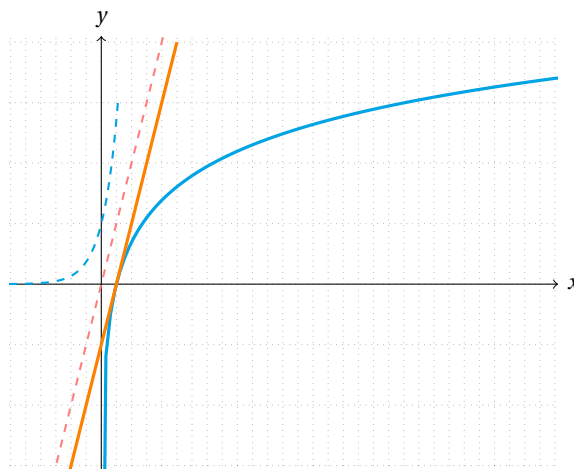


Figure 3 – Graphe de la fonction logarithme et sa tangente en 1 d'équation $y = x - 1$.

2 Fonction logarithme

Définition

$\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est la bijection réciproque de \exp .

Propriété

- (i) \ln est continue, dérivable sur \mathbb{R}_+^* , $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. \ln est concave sur \mathbb{R} .
- (ii) $\ln(1) = 0$.
- (iii) \ln est strictement croissante.
- (iv) Si u dérivable, $\ln|u|$ dérivable et $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$.
- (v) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- (vi) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln x_i.$$

- (vii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.
- (viii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$.
- (ix) $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
- (x) $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$; $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$; $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$;
 $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$; $\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$.

x	0	1	$+\infty$
\ln'		+	+
\ln	$-\infty$	0	$+\infty$
Infos	ASV $x=0$		BPH

3 Fonctions puissances

a Définition

Définition

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose
 $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

b Propriétés

Propriété

Si $x, y > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

- $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
- $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
- $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$
- $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$.

4 Croissances comparées

Propriété

Si $\alpha, \beta > 0$,

- (i) $\frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- (ii) $|x|^\alpha e^{\beta x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^+$.
- (iii) $\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0^+$.
- (iv) $x^\beta |\ln x|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+$.

(Si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, on peut enlever les valeurs absolues!)

5 Fonctions hyperboliques

Définition

Les fonctions **cosinus hyperbolique**, notée **ch**, **sinus hyperbolique**, notée **sh** et **tangente hyperbolique**, notée **th** sont définies sur \mathbb{R} par

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Propriété

Les seules formules de trigonométrie hyperbolique au programme sont

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Propriété

- (i) $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}, \operatorname{th}$ sont définies, continues, dérivables sur \mathbb{R} . La première est paire, les deux autres sont impaires.
- (ii) $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}; \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}; \operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = 1 - \operatorname{th}^2$.
- (iii) $\operatorname{ch} > 0$ et sh et th sont strictement croissantes.
- (iv) $\operatorname{ch} x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty; \operatorname{sh} x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty; \operatorname{th} x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm 1$.
- (v) th est bornée par 1 (strictement).
- (vi) $\frac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $\frac{\operatorname{th} x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

Variations et graphes. $y = \frac{e^x}{2}$ est asymptote à ch et sh .

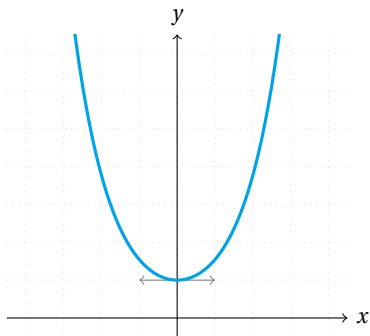


Figure 4 – cosinus hyperbolique (chaînette)

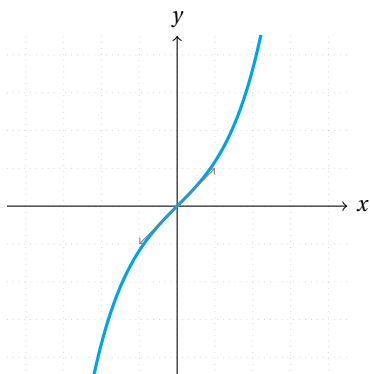


Figure 5 – sinus hyperbolique

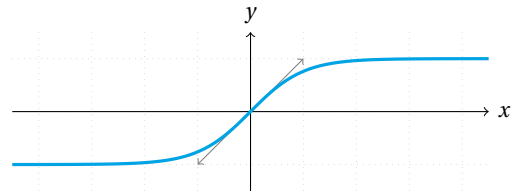


Figure 6 – tangente hyperbolique

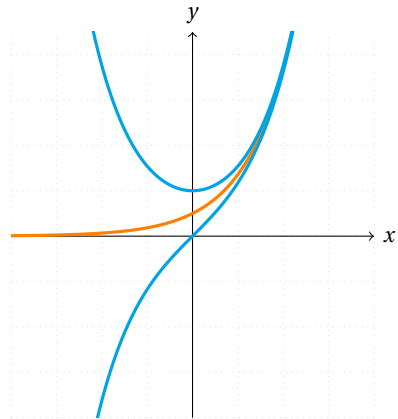


Figure 7 – cosinus et sinus hyperboliques, $x \mapsto \frac{e^x}{2}$

6 Fonctions circulaires réciproques

Définition

- La réciproque de la restriction de la fonction \sin à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est appelée **arc sinus**, notée

$$\operatorname{Arcsin} : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} x \end{cases}$$

où $y = \operatorname{Arcsin} x$ est l'unique angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus vaut x .

$$\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y = \operatorname{Arcsin} x \end{cases} \iff \begin{cases} y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin y = x \end{cases}$$

$$\operatorname{Arcsin} = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \right)^{-1}$$

- La réciproque de la restriction de la fonction \cos à $[0, \pi]$ est appelée **arc cosinus**, notée

$$\operatorname{Arccos} : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arccos} x \end{cases}$$

où $y = \operatorname{Arccos} x$ est l'unique angle entre 0 et π dont le cosinus vaut x .

$$\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y = \operatorname{Arccos} x \end{cases} \iff \begin{cases} y \in [0, \pi] \\ \cos y = x \end{cases}$$

$$\operatorname{Arccos} = \left(\cos|_{[0, \pi]} \right)^{-1}$$



- La réciproque de la restriction de la fonction \tan à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est appelée **arc tangente**, notée

$$\text{Arctan} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \text{Arctan } x \end{cases}$$

où $y = \text{Arctan } x$ est l'unique angle entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x .

$$y = \text{Arctan } x \iff \begin{cases} y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \tan y = x \end{cases}$$

$$\text{Arctan} = (\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[})^{-1}$$

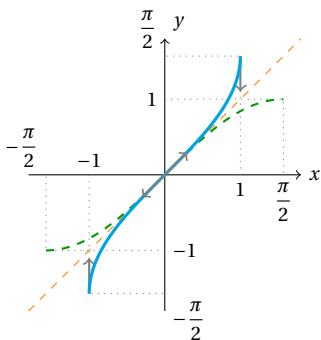


Figure 8 – Fonction Arcsin

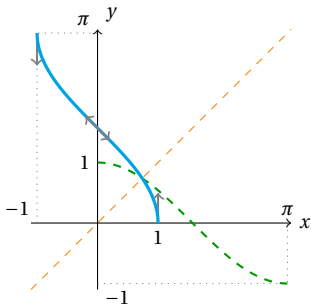


Figure 9 – Fonction Arccos

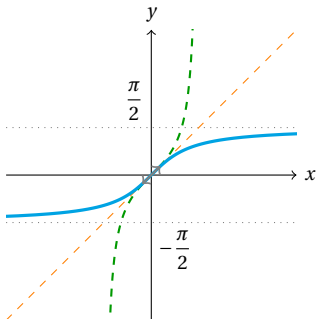


Figure 10 – Fonction Arctan

Propriétés

- (i) Arcsin est strictement croissante et impaire sur $[-1, 1]$.

(ii) $\forall x \in [-1, 1],$

$$\sin(\text{Arcsin } x) = x.$$

(iii) $\forall y \in \mathbb{R},$

$$\text{Arcsin}(\sin(y)) = y \iff y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

(en général, $\text{Arcsin}(\sin(y))$ et y ont même sinus...)

(iv) Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(i') Arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

(ii') $\forall x \in [-1, 1],$

$$\cos(\text{Arccos } x) = x.$$

(iii') $\forall y \in \mathbb{R},$

$$\text{Arccos}(\cos(y)) = y \iff y \in [0, \pi]$$

(en général, $\text{Arccos}(\cos(y))$ et y ont même cosinus...)

(iv') Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et

$$\forall x \in] -1, 1[, \text{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(v') $\forall x \in [-1, 1],$

$$\text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}.$$

(i'') Arctan est strictement croissante et impaire sur \mathbb{R} et tend vers $\pm \frac{\pi}{2}$ en $\pm\infty$.

(ii'') $\forall x \in \mathbb{R},$

$$\tan(\text{Arctan } x) = x.$$

(iii'') $\forall y \neq \frac{\pi}{2}[\pi],$

$$\text{Arctan}(\tan(y)) = y \iff y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

(en général, $\text{Arctan}(\tan(y))$ et $\tan y$ ont même tangente...)

(iv'') Arctan est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

(v'') $\forall x \neq 0,$

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \text{sgn}(x) \frac{\pi}{2}.$$

III Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Définition

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subset \mathbb{R}$. On pose

$$\Re(f) : x \mapsto \Re(f(x)) \quad \text{et} \quad \Im(f) : x \mapsto \Im(f(x)).$$

On dit que f est dérivable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont et on pose alors $f' = (\Re(f))' + i(\Im(f))'$. Autrement dit, $\Re(f') = (\Re(f))'$ et $\Im(f') = (\Im(f))'$.

Propriété

$$f = e^\varphi \text{ avec } \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \text{ est dérivable et } f' = \varphi' e^\varphi.$$