

chapitre VII

Calculs de primitives

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Primitives et intégrales

Définition : Primitive

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I . On dit que F est une primitive de f sur I lorsque

- F est dérivable sur I ,
- $F' = f$.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, F, G deux primitives de f sur I , avec I intervalle.

Alors on a $C \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in I, F(x) = G(x) + C.$$

Théorème : Théorème fondamental de l'analyse

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et f continue sur I , $a \in I$. Alors

$$F : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Corollaire

Soit f continue sur un intervalle I de \mathbb{R} , F une primitive de f sur I , $a, b \in I$.

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Calcul de primitives et d'intégrales

1 Calculs directs

On utilisera la notation suivante pour désigner les primitives d'une fonction continue f sur un intervalle : $\int f(x) dx$.

⚠ C est une notation à constante près, c'est-à-dire que si F est une primitive de f sur un intervalle I , $\int f(x) dx = F(x) + C$ où $C \in \mathbb{K}$.

⚠ Il faut toujours commencer par préciser sur quel(s) intervalle(s) le calcul de primitive a lieu. S'il y a plusieurs intervalles, c'est un bon réflexe de les indexer par un indice k et d'écrire C_k la constante correspondant : cela nous sera en particulier utile pour les résolutions d'équations différentielles. Il est bien

entendu indispensable de connaître ses primitives usuelles (cf formulaire).

On reconnaît souvent une forme $u' \times v'(u)$ qui s'intègre en $v \circ u$ (voir aussi le changement de variable ci-après).

On peut parfois passer par les complexes : par définition, la partie réelle (imaginaire) de la primitive est la primitive de la partie réelle (imaginaire).

2 L'intégration par parties

Théorème : Intégration par parties

Si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , alors

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

Si $a, b \in I$,

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt.$$

a Élimination d'une fonction dont la dérivée est plus simple

Comme les fonctions \ln , Arccos, Arcsin, Arctan, etc.

b Abaissement du degré, formule de récurrence

3 Le changement de variable

Théorème

Si f est continue sur I et $\varphi : J \rightarrow I$ est de classe \mathcal{C}^1 sur J , on peut faire le changement de variable $x = \varphi(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx.$$

Si $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

⚠ Bien changer les bornes quand il y en a!!
On écrit formellement « $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) dt$ ».
Deux utilisations sont possibles.

a On veut calculer $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$

C'est en fait le cas où on reconnaît une forme $\varphi' \times f \circ \varphi$.

b On veut calculer $\int f(x) dx$

Dans ce cas, il faut écrire $x = \varphi(t)$ avec φ de classe \mathcal{C}^1 . Mais attention, si on fait un calcul de primitive, il faudra choisir φ **bijective** pour pouvoir à la fin du calcul revenir de t à x ($t = \varphi^{-1}(x)$). Si c'est un calcul d'intégrale avec des bornes, φ n'a pas besoin d'être bijective!

Comment déterminer un bon changement de variable? Pas toujours facile, mais voici quelques tuyaux pour y parvenir.

4 Les fonctions rationnelles

Parfois, un simple changement de variable, ou des astuces du type $+1-1$ permettent de calculer les primitives.

Si ce n'est pas possible de simplifier « à vue », l'idée est de se ramener à des fractions simples pour utiliser, si $a \in \mathbb{R}$, sur $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C \text{ si } n \neq 1 \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C.$$

Pour se faire on procède à ce qu'on appelle une **décomposition en éléments simples**. Elles seront étudiées plus tard dans l'année. Le principe est le suivant : on s'arrange pour que le degré du numérateur soit inférieur à celui du dénominateur (division polynomiale). Puis on factorise le dénominateur. Enfin, on écrit la fraction comme une somme de fractions plus simples,



du type ci-dessus avec la règle suivante : un facteur $(x-a)^n$ au dénominateur donne des termes $\frac{\alpha_1}{x-a} + \dots + \frac{\alpha_n}{(x-a)^n}$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des constantes à déterminer.

Il y a un autre cas à traiter : c'est celui pour lequel on obtient un facteur ax^2+bx+c au dénominateur sans racine réelle : cela donne dans la décomposition un terme en $\frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c}$, qui se primitive en \ln et Arctan comme dans l'exemple ci-après :

5 Les fonctions trigonométriques

Si on veut intégrer une fonctions polynomiale en $\cos x$ et $\sin x$, le plus simple est de linéariser. Cependant, si on a un terme en $\sin^p x \cos^q x$ avec p ou q impair, on peut poser $t = \cos x$ si q est impair et $t = \sin x$ si p est impaire en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Si on veut intégrer une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$, on applique les règles de Bioche :

Propriété : Règles de Bioche

Si « $f(x)$ dx » est invariant par

- $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
- $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
- $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
- Sinon, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

6 Les fonctions hyperboliques

Pour les fonctions faisant intervenir ch , sh , th et \exp , on peut poser $t = e^x$ ($\text{ch} x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$, $\text{sh} x = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$, $\text{th} x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$.)

Si l'on a une fraction rationnelle en ch , sh , th , il est plus efficace d'appliquer un changement de variable obtenu grâce aux règles de Bioche appliquées à la fraction rationnelle dans laquelle on aura remplacé mentalement ch , sh , th par \cos , \sin , \tan respectivement.

7 Les fonctions avec radical

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ (x et $\sqrt{ax+b}$ en particulier), on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

- Si l'on souhaite intégrer une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ($a \neq 0$), il faut mettre ce dernier sous forme canonique pour obtenir du

$$\sqrt{\pm(\alpha x + \beta)^2 \pm 1}$$

puis poser $t = \alpha x + \beta$.

Ensuite, on effectue un dernier changement de variable pour se ramener à un carré sous la racine.

Ainsi, pour

- ★ $\sqrt{t^2+1}$ on pose $t = \text{sh} u$ ($\text{sh}^2+1 = \text{ch}^2$) ou $t = \tan u$ ($1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$, attention à l'intervalle dans ce cas là.)
- ★ $\sqrt{t^2-1}$ on pose $t = \pm \text{ch} u$ suivant le signe de t . ($\text{ch}^2-1 = \text{sh}^2$.)
- ★ $\sqrt{1-t^2}$ on pose $t = \sin u$ ou $t = \cos u$ ($1 - \cos^2 = \sin^2$ et $1 - \sin^2 = \cos^2$.)