

BANQUE D'EXERCICES CCINP – PROGRAMME DE MPSI

- Les exercices qui suivent sont issus de la banque d'exercices du concours CCINP. Le premier exercice donné à l'oral du concours est systématiquement issu de cette banque d'exercices, qui sont souvent proches du cours, ou mettant en uvre des techniques classiques.
- Nous avons sélectionné les exercices qui n'utilisent que des notions du programme de première année.
- Des corrigés officiels sont disponibles en ligne, ce qui vous permet de travailler ces exercices de révision en autonomie.
- Lorsque certaines questions d'un exercice utilisent des notions du programme de deuxième année, elle apparaissent barrées.

1. Analyse

A. Équations différentielles

1 CCINP 31

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle $y'' + y = \cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.

2 CCINP 42

On considère les deux équations différentielles suivantes :

$$2xy' - 3y = 0 \quad (H)$$

$$2xy' - 3y = \sqrt{x} \quad (E)$$

1. Résoudre (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

B. Nombres complexes

3 CCINP 84

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans \mathbb{C} de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

4 CCINP 89

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$. On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=0}^{n-1} |z^k - 1|$. Montrer que

$$S = \frac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}.$$

C. Suites

5 CCINP 1

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \sim_{+\infty} v_n$.
Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

6 CCINP 43

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.
 - (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0 , le sens de variation de (u_n) .
 - (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h , continues sur \mathbb{R} , telles que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

D. Intégration

7 CCINP 56

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que H est C^1 sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2., calculer la limite en 1^+ de la fonction H .

E. Séries

8 CCINP 5 : Série de Bertrand particulière

1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Cas $\alpha \leq 0$

En utilisant une minoration très simple de u_n , démontrer que la série diverge.

(b) Cas $\alpha > 0$

Étudier la nature de la série.

Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 3} \frac{\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) e^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2 + n))^2}$.

9 CCINP 6 : Critère de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge.

Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

10 CCINP 7

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
On suppose que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
Montrer que si $u_n \sim_{+\infty} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
2. Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(i-1) \ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)}$.
(i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

11 CCINP 8 : Séries alternées

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

1. (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.
(b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.
2. (a) Étudier la convergence simple [pour $x \in \mathbb{R}$ fixé] de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.
(b) Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

12 CCINP 46 : Séries alternées

On considère la série

$$\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}).$$

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$,

$$\pi \sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge.
 3. $\sum_{n \geq 1} \cos(\pi \sqrt{n^2 + n + 1})$ converge-t-elle absolument ?

2. Algèbre
A. Arithmétique

13 CCINP 86

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$ alors $p \wedge (ab) = 1$.
 2. Soit p un nombre premier.

- (a) Prouver que pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, p divise $\binom{p}{k} k!$ et en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

- (b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^p \equiv n \pmod{p}$.
Indication : procéder par récurrence.

- (c) En déduire, pour tout entier naturel n , que p ne divise pas $n \implies n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

14 CCINP 94

1. Énoncer le théorème de Bézout dans \mathbb{Z} .
 2. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que : $(a|c \text{ et } b|c) \iff ab|c$.
 3. On considère le système (S) :
$$\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$$
 dans lequel l'inconnue x appartient à \mathbb{Z} .
 (a) Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans \mathbb{Z} .
 (b) Déduire des questions précédentes la résolution dans \mathbb{Z} du système (S).

B. Polynômes

15 CCINP 87

Soient a_0, a_1, \dots, a_n $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, \dots, b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leq n$ et $\forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = b_i$.
 2. Soit $k \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$. Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$,
$$\sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p.$$

16 CCINP 90

\mathbb{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de \mathbb{K} .

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^3 \\ P &\longmapsto (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.

- (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .

3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .

4. **Application** : On se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$. Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

17 CCINP 85

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
 (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $(1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$.
 (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que : a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in \llbracket 0, r-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$.
 2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

C. Espaces vectoriels

18 CCINP 55

Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
 (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
 2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$. Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .
Indication : discuter suivant les valeurs de a .

D. Applications linéaires

19 CCINP 60

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
 2. f est-il surjectif ?
 3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
 4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

20 CCINP 62

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
 2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 (a) en utilisant le lemme des noyaux ;
 (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
 3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

21 CCINP 93

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.

1. Montrer que $\text{Im } u \oplus \text{Ker } u = E$.
 2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynômes.
 (b) En déduire que $\text{Im } u = \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$.
 3. On suppose que u est non bijectif. Déterminer les valeurs propres de u . Justifier la réponse.

Remarque : les questions 1., 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

E. Matrices d'applications linéaires

22 CCINP 59

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
 (a) sans utiliser de matrice de f ,
 (b) en utilisant une matrice de f .
 2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
 3. ~~f est-il diagonalisable ?~~

23 CCINP 71

Soit p , la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 , sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

- Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

F Déterminant

24 CCINP 63

Soit un entier $n \geq 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geq 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n .

- Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
- Déterminer D_n en fonction de n .
- Justifier que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

G. Espaces préhilbertiens

25 CCINP 76

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
 - Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.

2. Soit

$$E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}.$$

Prouver que l'ensemble

$$\left\{ \int_a^b f(t)dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$$

admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

26 CCINP 77

Soit E un espace euclidien.

- Soit A un sous-espace vectoriel de E . Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

27 CCINP 78

Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E .

On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

- Soit u un endomorphisme de E , tel que : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
 - Démontrer que $\forall (x, y) \in E^2 (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
 - Démontrer que u est bijectif.

2. Démontrer que l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ des isométries vectorielles de E , muni de la loi \circ , est un groupe.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Prouver que $u \in \mathcal{O}(E)$ si et seulement si $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

28 CCINP 79

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

- Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

On pose, pour $(f, g) \in E^2$,

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

- Majorer $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

29 CCINP 80

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- Démontrer que $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
- Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

30 CCINP 81

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application $\varphi(A, A') = \text{tr}({}^tAA')$, où $\text{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice tA par la matrice A' .

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
- Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
- Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

31 CCINP 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- Démontrer que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Calculez la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

32 CCINP 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose $\forall (A, B) \in E^2, \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^tAB)$ où tr désigne la trace et tA désigne la transposée de la matrice A .

- Prouver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .
- On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E . Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$. On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .

- Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
- Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

- Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E . Déterminer F^\perp .

3. Dénombrement et probabilités

A. Dénombrement

33 CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

- Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
- Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
- Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

B. Probabilités

34 CCINP 105

- Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
- On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
 - On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

35 CCINP 107

- On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .
 - Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement "la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche" et on pose $p_n = P(B_n)$.
- Calculer p_1 .
 - Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$
 - En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .

C. Variables aléatoires

36 CCINP 95

- Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.
- Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées. On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
 - Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
 - Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
 - Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
 - Déterminer la loi de X .
 - Déterminer la loi de Y .

37 CCINP 98

- Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
- Donner la loi de X . Justifier.
 - La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
 - Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
 - Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. **Indication** : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :

$$\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}.$$
 - Déterminer l'espérance et la variance de Z .

38 CCINP 99

- Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Prouver que pour tout $a \in]0, +\infty[$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}.$$
- Application** : On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? **Indication** : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

39 CCINP 101

- Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C . À l'instant $t=0$, il se trouve au point A . Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'événement "l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet". On note B_n l'événement "l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet". On note C_n l'événement "l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet". On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.
- Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
 - Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n .
 - On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$
 - Justifier, sans calculs, que la matrice A est diagonalisable.

- Prouver que $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.
 - Déterminer [On admet qu'il existe] une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. **Remarque** : Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.
3. Montrer comment les résultats de la question 2. peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n . **Remarque** : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

40 CCINP 104

- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
3. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3. On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules. On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.
- Préciser les valeurs prises par X .
 - Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
 - Finir de déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer $E(X)$.
 - Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$. Interpréter ce résultat.

41 CCINP 109

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.
- Déterminer la loi de X .
 - Déterminer la loi de Y .