

## Programme de colle – MP2I

Extrait du programme officiel :

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique.

Cette section « boîte à outils » complète l'enseignement du lycée sur un certain nombre de points importants pour la suite :

- calculs de sommes et de produits, dont la formule du binôme;
- résolution de petits systèmes linéaires par l'algorithme du pivot;
- manipulation d'inégalités et résolution d'inéquations;

Contenus

Capacités & commentaires

### a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Expressions simplifiées de  $\sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n x^k$ .

Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ .

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux.

Formule du binôme dans  $\mathbb{R}$ .

Notations  $\sum_{i \in I} a_i$ ,  $\prod_{i \in I} a_i$ . Cas où  $I$  est vide.

Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.

Exemples de sommes triangulaires.

Convention  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k < 0$  et  $k > n$ .

### b) Résolution de petits systèmes linéaires par la méthode du pivot

Système linéaire à coefficients réels de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

Algorithme du pivot et mise en évidence des opérations élémentaires.

Interprétation géométrique : intersection de droites dans  $\mathbb{R}^2$ , de plans dans  $\mathbb{R}^3$ .

Notations  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ .

### c) Inégalités

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations. Intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Dans  $\mathbb{R}$ , parties majorées, minorées, bornées.

Majorant, minorant ; maximum, minimum.

Partie entière d'un nombre réel.

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. Utilisation de factorisations et de tableaux de signes. Résolution d'inéquations.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

Notation  $[x]$ .

- Systèmes linéaires pour les colles de jeudi et vendredi seulement.
- Ajout de la partie entière dans la partie c) du programme par rapport à la semaine dernière.

Semaines prochaines : Trigonométrie, nombres complexes.

### Questions de cours :

- (i) Double inégalité triangulaire avec le cas d'égalité habituel.
- (ii) Unicité de la partie entière (existence admise), si  $x \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $[x + k] = [x] + k$ , croissance de  $[\cdot]$ .
- (iii) Expressions simplifiées de  $\sum_{k=0}^n k$ ,  $\sum_{k=0}^n k^2$ ,  $\sum_{k=0}^n k^3$ , preuve **sans récurrence** pour les deux premières.
- (iv) Expression simplifiée de  $\sum_{k=0}^n x^k$ . Factorisation de  $a^n - b^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- (v) Relation  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ . Formule et triangle de Pascal. Relation entre  $\binom{n}{k}$  et  $\binom{n-1}{k-1}$ . Parmi les preuves, au moins une **par dénombrement** et une **avec les factorielles** (attention dans ce cas aux cas particuliers !)
- (vi) Formule du binôme, preuve par dénombrement ou par récurrence au choix du colleur.