

Programme de colle – MP2I

1. Nombres complexes

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes.	La construction de \mathbb{C} est hors programme.
Brève extension du calcul de $\sum_{k=0}^n x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie \mathbb{C} au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $ z - z' $, cercles et disques.
Relation $ z ^2 = z\bar{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$.	Notation \mathbb{U} . Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q)$, $\sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ ($r > 0$) d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans \mathbb{C} . Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

f) Racines n -ièmes

Description des racines n -ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.

Notation \mathbb{U}_n .
Représentation géométrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)}e^{i\operatorname{Im}(z)}$.
Exponentielle d'une somme.
Pour tous z et z' dans \mathbb{C} , $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.
Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.

Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.
Interprétation géométrique de la conjugaison.

Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.

Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
L'étude générale des similitudes est hors programme.

2. Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition. Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$. Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Parité, imparité, périodicité.	
Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte). Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $ f $ est majorée.
b) Dérivation	
Dérivée d'une fonction. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$. Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles. Résultats admis à ce stade.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	

Contenus

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.
Fonction de classe \mathcal{C}^1 .
Dérivées d'ordre supérieur.

Capacités & Commentaires

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

Semaine prochaine : Fonctions usuelles.

Questions de cours :

- (i) Formulaire de trigonométrie (circulaire) avec quelques preuves (choisies par le colleur).
- (ii) Inégalités triangulaires sur \mathbb{C} avec cas d'égalité.
- (iii) Propriétés du conjugué et du module.
- (iv) Calcul et simplification, au choix de l'interrogateur, de

$$\bullet \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(a + kb), \quad \bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb) \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb),$$

- (v) Trinômes du second degré dans \mathbb{C} et relations coefficients racines.
- (vi) Racines n^{e} de l'unité, puis d'un complexe non nul quelconque.
- (vii) Écriture complexe d'une rotation et d'une homothétie. Description des applications $z \mapsto az + b$.