

Programme de colle – MP2I

Calcul en analyse

Extrait du programme officiel :

Le point de vue adopté dans cette section est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fait l'objet de sections ultérieures.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu.

Contenus	Capacités & commentaires
----------	--------------------------

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.

Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.

Parité, imparité, périodicité.

Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.

Somme, produit, composée.

Monotonie (large et stricte).

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Traduction géométrique de ces propriétés.

La fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.

Notations $f'(x)$, $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade.

Exemples simples de calculs de dérivées partielles. Résultats admis à ce stade.

Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.

Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.

Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.

Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.

La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.

Fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Dérivées d'ordre supérieur.

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.

Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur \mathbb{R}_+^* et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur \mathbb{R}_+^* . Logarithme décimal, logarithme en base 2.

Relations $(xy)^a = x^a y^a$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Inégalités $\exp(x) \geq 1+x$, $\ln(1+x) \leq x$.

Contenus

Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.

Fonctions hyperboliques sh, ch, th.

Capacités & Commentaires

Dérivée, variations, représentation graphique.

Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.

- La définition de la bijectivité est pour le moment celle de la terminale.
- La méthode d'étude des asymptotes obliques et des branches paraboliques au voisinages de l'infini est connue des étudiants.
- La plupart des résultats sont admis provisoirement.
- Les fonctions circulaires réciproques n'auront été vues qu'en début de semaine.

Questions de cours :

- Toute fonction se décompose de manière unique en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Formulaire de trigonométrie (circulaire) avec quelques preuves (choisies par le colleur).
- Calcul et simplification, au choix de l'interrogateur, de

$$\bullet \sum_{k=0}^n \cos(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(a+kb),$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a+kb),$$

- Tout énoncé de définition/propriété/théorème au programme de cette semaine.
- Croissances comparées (limites de type xe^x , e^x/x , $x \ln x$, $\ln x/x$ vues comme propriété de \exp et \ln , puis extension avec des exposants.)
- Unicité d'une fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp x \exp y$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.
- Définition + propriétés + graphe de (ch et sh et th) **ou** Arccos **ou** Arcsin **ou** Arctan.
(les « **ou** » sont exclusifs mais c'est bien sûr l'interrogateur qui choisit !)