

## Devoir Libre n°2

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).

La rédaction est à soigner tout particulièrement !

### Partie 1 – Une formule combinatoire

On se fixe  $n, N \in \mathbb{N}$  tels que  $n \leq N$  et on veut démontrer la formule

$$\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

- Comment cette formule se traduit-elle dans le triangle de Pascal ?
- Démontrer la formule par récurrence.

Attention, c'est délicat car il y a deux variables entières  $n$  et  $N$ . Il faut bien choisir la variable sur laquelle va porter la récurrence, et bien réfléchir à ce que l'on fait de l'autre : est-elle fixée une fois pour toute, ou a-t-on besoin de la faire varier dans l'hypothèse de récurrence ?

- On propose une autre démonstration : si  $k \geq n$ , exprimer  $\binom{k}{n}$  en fonction de  $\binom{k+1}{n+1}$

et  $\binom{k}{n+1}$  en utilisant une formule du cours.

Retrouver ainsi la formule.

- Exprimer  $k$ ,  $k^2$  et  $k^3$  à l'aide de  $\binom{k}{1}$ ,  $\binom{k}{2}$  et  $\binom{k}{3}$  puis utiliser la formule pour calculer

$$\sum_{k=0}^N k, \sum_{k=0}^N k^2 \text{ et } \sum_{k=0}^N k^3.$$

### Partie 2 – Autour des nombres harmoniques

On appelle  $n^{\text{e}}$  **nombre harmonique** le réel  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ .

On pose aussi (logiquement)  $H_0 = 0$ .

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Calculer, pour  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{k=p}^n \frac{1}{p}$  puis exprimer  $\sum_{p=1}^n \frac{n+1-p}{p}$  en fonction de  $H_n$ .

(b) En déduire la valeur de  $\sum_{1 \leq p \leq k \leq n} \frac{1}{p}$  en fonction de  $H_n$ .

(c) Démontrer que  $\sum_{k=0}^n H_k = (n+1)H_n - n$ .

- Le but de cette question est de calculer, pour  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} H_k$ .

(a) Montrer que pour tout  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$  et  $\frac{1}{k+1} \binom{k+1}{m+1} = \frac{1}{m+1} \binom{k}{m}$ .

(b) En utilisant ce qui précède et la formule de la partie 1, calculer, pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n \binom{k+1}{m+1} (H_{k+1} - H_k)$ .

(c) Justifier que  $\sum_{k=0}^n \left( \binom{k+1}{m+1} H_{k+1} - \binom{k}{m+1} H_k \right) = \binom{n+1}{m+1} H_{n+1}$  et en déduire

$$\sum_{k=0}^n \left( \binom{k}{m} H_k + \binom{k+1}{m+1} (H_{k+1} - H_k) \right).$$

(d) Calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{k}{m} H_k$ . Que (re)donne le cas particulier  $m=0$  ?

- Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^n H_k^2$  en fonction de  $H_n$ .

On pourra commencer par écrire  $\sum_{k=1}^n H_k^2 = \sum_{k=1}^n \left( H_k \left( \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \right)$ .

- Limite de  $(H_n)$**

Cette partie est indépendante du reste.

(a) Montrer que si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .

(b) En déduire que  $(H_n)$  n'a pas de limite finie.

(c) Justifier que  $H_n \rightarrow +\infty$ .

FIN DE L'ÉNONCÉ