Corrigé du devoir Libre n°2

Partie 1 – Une formule combinatoire

1. Si l'on somme les cœfficients d'une colonne dans le triangle, le résultat est le cœfficient immédiatement en bas à droite.

2. On montrer la formule par récurrence sur $N \in [\![n, +\infty[\![$.
   - Si $N = n$, on a bien $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$.
   - Soit un $N \geqslant n$ pour lequel $\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

   Alors $\sum_{k=n}^{N+1} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1} + \binom{N+1}{n} = \binom{N+2}{n+1}$ d'après la formule du triangle de Pascal, ce qui établit la récurrence.

   On a donc bien $\boxed{\text{pour } N \geqslant n,\ \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.}$

3. Comme $\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$, par télescopage, $\boxed{\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{N+1}{n+1}.}$

4. On en déduit que $\sum_{k=0}^{N} k = \sum_{k=1}^{N} \binom{k}{1} = \binom{N+1}{2} = \frac{(N+1)N}{2!}$ puis

$$\sum_{k=2}^{N} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{N} \frac{k(k-1)}{2} = \sum_{k=0}^{N} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N} k^2 - \sum_{k=0}^{N} k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{N} k^2 - \frac{N(N+1)}{2}\right)$$
$$= \binom{N+1}{3} = \frac{(N+1)N(N-1)}{3!}.$$

   D'où $\sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{(N+1)N(N-1)}{3} + \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

   On retrouve donc bien $\boxed{\sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.}$

Partie 2 – Autour des nombres harmoniques

5. (a) $\boxed{\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{p} = \frac{n-p+1}{p}}$ et $\sum_{p=1}^{n} \frac{n+1-p}{p} = (n+1)\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} 1$ donc $\boxed{\sum_{p=1}^{n} \frac{n+1-p}{p} = (n+1)H_n - n.}$

   (b) $\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=p}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{n-p+1}{p}$ donc d'après a), $\boxed{\sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{p} = (n+1)H_n - n.}$

   (c) Comme $H_0 = 0$, $\sum_{k=0}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{p} = \sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{p}$ donc d'après la question précédente,

   $\boxed{\sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.}$

6. (a) Voir cours. Attention aux valeurs particulières!

   (b) Si $k \in \mathbb{N}$, $H_{k+1} - H_k = \frac{1}{k+1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{m+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{m+1}\binom{k}{m}$$

   vu a).

   Donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k) = \frac{1}{m+1}\binom{n+1}{m+1}}$ vu la première partie.

   (c) Par télescopage, $\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k+1}{m+1}H_{k+1} - \binom{k}{m+1}H_k\right) = \binom{n+1}{m+1}H_{n+1} - \binom{0}{m+1}H_0$ et donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k+1}{m+1}H_{k+1} - \binom{k}{m+1}H_k\right) = \binom{n+1}{m+1}H_{n+1}.}$$

   Donc, en utilisant la formule du triangle de Pascal,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k}{m}H_k + \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k)\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}\right)H_k + \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k+1}{m+1}H_{k+1} - \binom{k}{m+1}H_k\right)$$

   et finalement, $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k}{m}H_k + \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k)\right) = \binom{n+1}{m+1}H_{n+1}.}$

   (d) Enfin, $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}H_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k}{m}H_k + \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k)\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{k+1}{m+1}(H_{k+1} - H_k)$

   donc $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m}H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{m+1} - \frac{1}{m+1}\right).}$

   Si $m = 0$, $\sum_{k=0}^{n} H_k = \binom{n+1}{1}(H_{n+1} - 1) = (n+1)\left(H_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) = (n+1)H_n - n$ ce qui redonne le résultat trouvé en 1.c).

7.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} H_k^2 &= \sum_{k=0}^{n} H_k \times H_k = \sum_{k=0}^{n} H_k \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \right) \\
&= \sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \frac{H_k}{j} = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{k=j}^{n} H_k \right) \frac{1}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \left(\sum_{k=0}^{n} H_k - \sum_{k=0}^{j-1} H_k \right) \\
&\underset{\text{VU 1}}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \left((n+1)H_n - n - jH_{j-1} + j - 1 \right) \\
&= (n+1)(H_n - 1) \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} H_{j-1} + \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= (n+1)(H_n - 1)H_n - nH_{n-1} + (n-1) + n \\
&= (n+1)(H_n - 1)H_n - n\left(H_n - \frac{1}{n} \right) + (n-1) + n \\
&= (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n.$

8. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $H_{2n} - H_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n}$ donc $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}.$

(b) Si (H_n) avait une limite finie, $(H_{2n} - H_n)$ aurait une limite nulle, ce qui est contradictoire avec la question précédente.

Donc (H_n) n'a pas de limite finie.

(c) Comme par ailleurs (H_n) est une suite croissante, elle a une limite finie ou $+\infty$. Donc finalement, $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$

Fin