Devoir Libre n° 3

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier $\boxed{\text{encadrer}}$ les réponses, <u>tirer un trait</u> entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).
La rédaction est à soigner tout particulièrement !

Exercice 1 – Racines de polynômes de degré 3 par la méthode de Cardan

1. Déterminer les racines cubiques de -1 et i.
2. **Méthode de Cardan** [1]
   Soit $(p,q)\in\mathbb{C}^2$ et $(E)\quad z^3+pz+q=0$. On va élaborer une méthode de résolution de (E).
   Soit z_0 une solution éventuelle de (E).
   (a) Justifier l'existence de deux complexes u et v tels que $u+v=z_0$ et $uv=-\dfrac{p}{3}$.
   (b) Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation
   $$(E')\quad z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$
   (c) Vérifier que $\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v$ et $\mathrm{j}^2u+\mathrm{j}v$ sont également solution de l'équation (E).

   On en déduit donc la méthode suivante pour résoudre (E) :
   - **On forme l'équation (E') dont on calcule les racines.**
   - **On extrait des racines cubiques u et v de ces deux solutions vérifiant $uv=-\dfrac{p}{3}$.**
   - **Les solutions de (E) sont alors les complexes $u+v$, $\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v$ et $\mathrm{j}^2u+\mathrm{j}v$.**
3. Déterminer les solutions de $z^3-3\mathrm{i}z+1-\mathrm{i}$ sous forme algébrique.
4. Soit $(E_1)\quad z^3+az^2+bz+c=0$ où $a,b,c\in\mathbb{C}$.
   Déterminer $\lambda\in\mathbb{C}$ pour qu'un changement de variable $Z=z+\lambda$ permette de se ramener à une équation du type (E).
5. Résoudre $z^3-6z^2+9z-1=0$.

Exercice 2 – Étude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

1. Donner les domaines de définition, de continuité de f. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer f'. Préciser la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
3. Dresser le tableau des variations de f.
4. On admet que la courbe représentative de f possède un point d'abscisse x en lequel elle traverse sa tangente, appelé *point d'inflexion*, lorsque la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en x.
   Montrer que f présente une inflexion en un point d'abscisse α à préciser.
5. Déterminer l'intersection de la tangente en α avec l'axe des abscisses.
6. Représenter f ainsi que sa tangente en α sur un même graphe.
7. Justifier **rigoureusement**, en utilisant f, que l'équation $x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-2}$ admet exactement deux solutions.

---

1. 

Girolamo Cardan ou **Cardano** (Pavie, 1501 - Rome, 1576) est un mathématicien, un philosophe, un astrologue, un inventeur, et un médecin italien. Il fut le premier à introduire la théorie des équations algébriques. Sa méthode de résolution des équations du troisième degré (que lui fut enseignée par Niccòlo Fontana dit Tartaglia, sous serment de ne pas le publier, promesse qu'il ne tint pas) eut pour conséquence l'émergence des nombres imaginaires, qui deviendront nos nombres complexes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle.