Exercice 1 – Racines de polynômes de degré 3 par la méthode de Cardan

1. On a $(-1)^3=-1$ et $(-\mathrm{i})^3=-\mathrm{i}$, donc les racines cubiques de -1 sont $-1,-\mathrm{j},-\mathrm{j}^2$ et celles de i sont $-\mathrm{i},-\mathrm{ij},-\mathrm{ij}^2$.

2. (a) u et v tels que $u+v=z$ et $uv=-\dfrac{p}{3}$ sont les racines du trinôme $X^2-zX-\dfrac{p}{3}$, et donc existent bien.

   (b) On a $u^3v^3=(uv)^3=-\dfrac{p^3}{27}$ et
$$u^3+v^3=(u+v)^3-3u^3v-3uv^2=z^3-3uv(u+v)=z^3+pz=-q.$$
   Donc u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $(E')\quad z^2+qz-\dfrac{p^3}{27}=0.$

   (c) On calcule
$$(\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v)^3=u^3+3\mathrm{j}^4u^2v+3\mathrm{j}^5uv^2+v^3=u^3+v^3+3\mathrm{j}u^2v+3\mathrm{j}^2uv^2=-q+3uv(\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v)=-q-p(\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v)$$
   Donc $(\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v)^3+p(\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v)+q=0$.

   Par symétrie, on en conclut que $\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v$ et $\mathrm{j}^2u+\mathrm{j}v$ sont également solutions de l'équation (E).

3. $(E)\quad z^3-3\mathrm{i}z+1-\mathrm{i}=0$ donc $(E')\quad z^2+(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}=0$ dont les solutions sont facilement -1 et i.
   D'après la première question, on peut choisir $u=-1$ et $v=-\mathrm{i}$ des racines cubiques de chaque solution vérifiant $uv=-\dfrac{-3\mathrm{i}}{3}$. Les solutions de (E) sont donc $-1-\mathrm{i}$, $-\mathrm{j}-\mathrm{ij}^2$ et $-\mathrm{j}^2-\mathrm{ij}$.

   Après simplification, on obtient $-1-\mathrm{i},\ \dfrac{1-\sqrt3}{2}(1+\mathrm{i}),\ \dfrac{1+\sqrt3}{2}(1+\mathrm{i}).$

4. $(E_1)\quad z^3+az^2+bz+c=0$ où $a,b,c\in\mathbb{C}$.

   On met sous forme canonique $z^3+az^2+bz+c=\left(z+\dfrac{a}{3}\right)^3+\left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)z+c-\dfrac{a^3}{27}$. Il suffit donc de poser $Z=z+\dfrac{a}{3}$ pour se ramener à (E).

5. Conformément à la méthode mise en place, on pose $Z=z-2$ et on se ramène à l'équation $(E)\ Z^3-3Z+1=0$.
   D'où l'équation $(E')\ Z^2+Z+1=0$ dont les solutions sont bien sûr j et $\bar{\mathrm{j}}$.
   On en extrait des racines cubiques $u=\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{9}}$ et $v=\bar{u}=u=\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{9}}$ dont le produit vaut 1.
   Les racines de (E) sont donc

   - $u+v=u+\bar{u}=2\cos\dfrac{2\pi}{9}$
   - $\mathrm{j}u+\mathrm{j}^2v=\mathrm{j}u+\overline{\mathrm{j}u}=2\cos\dfrac{8\pi}{9}=-2\cos\dfrac{\pi}{9}$
   - $\mathrm{j}^2u+\mathrm{j}v=\bar{\mathrm{j}}u+\overline{\bar{\mathrm{j}}u}=2\cos\dfrac{4\pi}{9}$

   Finalement, les racines de z^3-6z^2+9z-1 sont $2+2\cos\dfrac{2\pi}{9},\ 2-2\cos\dfrac{\pi}{9}$ et $2+2\cos\dfrac{4\pi}{9}$, soit encore $2\cos^2\dfrac{\pi}{9},\ 2\sin^2\dfrac{\pi}{18}$ et $2\cos^2\dfrac{2\pi}{9}$.

Exercice 2 – Étude de fonction

1. Comme $\sqrt{\cdot}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{e}^{-\frac{\cdot}{2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, $f(x)=|-x|^{1/2}\mathrm{e}^{\frac12(-x)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ par croissance comparée.

La courbe représentative de f admet comme asymptote horizontale l'axe des abscisse en $+\infty$.

2. Comme $\sqrt{\cdot}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\mathrm{e}^{-\frac{\cdot}{2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$. On a de plus, si $x\in\mathbb{R}_*^+$,
   $f'(x)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ soit $f'(x)=\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. Au voisinage de 0, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to0]{}+\infty$, donc f n'est pas dérivable en 0 et sa courbe représentative y possède une (demi-)tangente verticale.

3. On a directement, vu f' :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$	$\searrow$	0

4. f' est dérivable par opérations sur $\mathbb{R}_*^+$ et si $x\in\mathbb{R}_*^+$,
$$f''(x)=\left(\frac{-2\sqrt{x}-\frac{1-x}{\sqrt{x}}}{4x}-\frac{1-x}{4\sqrt{x}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{x^2-2x-1}{4x\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$
   $f''(x)$ est donc du signe de x^2-2x-1 dont le discriminant réduit est 2, donc les racines sont $1\pm\sqrt2$. Comme $1-\sqrt2<0$, on s'interesse à $1+\sqrt2\in\mathbb{R}_*^+$. Comme le trinôme a deux racines distinctes, x^2-2x-1 et donc f'' s'annulent en changeant de signe en $\alpha=1+\sqrt2$. Donc f présente une inflexion en $\alpha=1+\sqrt2$.

5. La tangente en α a pour équation $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$. Comme $\alpha\neq1$, $f'(\alpha)\neq0$ et l'abscisse de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisse est
$$x=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=\alpha-\frac{2\alpha}{1-\alpha}=\frac{\alpha^2+\alpha}{\alpha-1}=\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}=\frac{4+3\sqrt2}{\sqrt2}=3+2\sqrt2$$
   car α racine de x^2-2x-1 donc $\alpha^2+\alpha=3\alpha+1$.
   L'intersection de la tangente en α et l'axe des abscisse est le point de coordonnées $(3+2\sqrt2,0)$.

6.

7. Remarquons qu'une solution de l'équation est nécessairement positive et qu'alors
$$x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-2}\iff\sqrt{x\mathrm{e}^{-x}}=\sqrt{\mathrm{e}^{-2}}\iff f(x)=\mathrm{e}^{-1}.$$
   Or, d'après les questions précédentes et le théorème de la bijection, f est strictement monotone et continue donc induit une bijection de $]0,1[$ sur $f(]0,1[)=\left]0,\mathrm{e}^{-\frac12}\right[$ et de $]1,+\infty[$ sur $f(]1,+\infty[)=\left]0,\mathrm{e}^{-\frac12}\right[$.

   Comme $\mathrm{e}^{-1}\in\left]0,\mathrm{e}^{-\frac12}\right[$, l'équation $x\mathrm{e}^{-x}=\mathrm{e}^{-2}$ admet exactement deux solutions : une dans $]0,1[$ et l'autre dans $]1,+\infty[$.

Fin