chapitre VIII

Équations différentielles linéaires

I Équations différentielles du premier ordre

Dans toute cette partie, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. D est une partie de $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une réunion quelconque d'intervalles.

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL$_1$) toute équation du type

$$(L)\ \forall x \in D,\quad \alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x)$$

où α,β,γ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $y : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions.

Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation

$$(H)\ \forall x \in I,\quad \alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=0$$

est appelée **équation homogène associée à** (L).

La résolution d'un problème du type

$$\begin{cases} \forall x \in D,\quad \alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

avec $x_0 \in D$ et y_0 fixé est appelé **problème de Cauchy**[0].

Toute la théorie sera valable sur des $\boxed{\text{intervalles } I}$ sur lesquelles $\boxed{\alpha \text{ ne s'annule pas}}$ et sur lesquels $\boxed{\alpha,\beta,\gamma \text{ sont continues.}}$ On se ramène alors a une équation, dite **normalisée**, du type

$$(L)\ \forall x \in I,\quad y'(x)+a(x)y(x)=b(x)$$

avec $a=\dfrac{\beta}{\alpha}$ et $b=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. L'équation homogène associée est $(H)\ \forall x \in I,\ \ y'(x)+a(x)y(x)=0$.

0. 

Augustin-Louis Cauchy (Baron) (Paris, 1789 - Sceaux (Hauts-de-Seine), 1857) est le mathématicien français le plus prolifique (presque 800 articles publiés). Il enseigne à l'École Polytechnique, le premier cours d'analyse rigoureux ne se basant plus simplement sur l'intuition (limites, continuité, etc.). Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. Ses autres contributions comprennent des recherches sur la convergence et la divergence des séries infinies, les équations différentielles, les déterminants, les probabilités, l'analyse complexe et la physique mathématique.

2 Résolution de l'équation homogène

Propriété

Soit $(H)\ \forall x \in I,\ \ y'(x)+a(x)y(x)=0$ avec a continue sur I.

L'ensemble des solutions de (H) est

$$S_H=\left\{ f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{-A(x)} \end{array} \right., \lambda \in \mathbb{K} \right\}$$

*où A désigne **une** primitive quelconque de a ($A(x)=\int a(x)\mathrm{d}x$.)*

Corollaire : Cas du cœfficient constant

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Les solutions de $y'=\alpha y$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda e^{\alpha x} \end{array} \right.$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ \ y'(x)=\alpha y(x) \\ y(0)=1 \end{cases}$ admet pour unique solution $x \mapsto e^{\alpha x}$.

Méthode : Raccord de solution

Des raccords de solutions sont nécessaires aux points où la fonction a s'annule.

Pour effectuer un raccord de solutions, on résout l'équation sur les intervalles où a ne s'annule pas. **Il est primordial d'indexer les constantes en fonction de l'intervalle**.

On raisonne alors par analyse-synthèse.

Analyse Si f est solution raccordé (donc sur un intervalle où a peut s'annuler), elle est solution sur les intervalles où a ne peut pas s'annuler, d'où une expression de f sur **chacun** de ces intervalles (avec des constantes a priori différentes). f doit aussi être dérivable sur tout cet intervalle.

On traduit alors dans l'ordre le fait que f soit solution au(x) point(s) de raccord, qu'elle y soit continue et enfin dérivable jusqu'à obtenir suffisamment d'information sur les constantes.

Synthèse On vérifie réciproquement qu'avec ces conditions on a bien la dérivabilité sur l'intervalle et le fait que f vérie l'équation.

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions définies sur D, $(L)\ \forall x \in I,\ \ y'(x)+a(x)y=b(x)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors

$$f \in S_L \Longleftrightarrow f-f_0 \in S_H$$

soit

$$S_L=\{f_0+h,\ h \in S_H\}=f_0+S_H.$$

Méthode : Résoudre une EDL$_1$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisée $y' + ay = b$ sur un intervalle sur lequel les fonctions a et b sont continues.

- On résout l'équation homogène associée $y' + ay$ à l'aide d'une primitive A de a : les solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
- On cherche une solution particulière f_0.

Alors les solutions sont toutes les fonctions $x \mapsto f_0(x) + \lambda e^{-A(x)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Pour résoudre (L), il suffit donc de trouver **une** solution de (L) après avoir résolu (H). Comment faire ?

- Soit il y a une solution évidente,
- soit on utilise les techniques suivantes.

b Principe de superposition

Propriété

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, a, b définies sur I avec $b(x) = \lambda_1 b_1(x) + \cdots + \lambda_n b_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k(x)$ où les λ_k sont des scalaires et les b_k des fonctions.

Si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, f_k est une solution particulière de (L_k) $y' + a(x)y = b_k(x)$, alors $f_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$ est solution de (L) $y' + a(x)y = b(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$.

c Méthode de variation de la constante

Comment trouver une solution particulière dans le cas général ? Exactement comme pour résoudre l'équation homogène, avec le facteur intégrant :

$$f' + af = b \iff f'e^A + afe^A = be^A \iff \left(fe^A\right)' = be^A \iff f = \left(\int be^A\right)e^{-A}$$

Les solutions sont donc à chercher sous la forme $f(x) = g(x)e^{-A(x)}$.

Propriété

*Avec les hypothèses habituelles, on peut trouver une solutions particulières de la forme $x \mapsto g(x)e^{-A(x)}$. C'est la **méthode de variation de la constante** (à partir de la solution générale de l'équation homogène.)*

d Existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Propriété

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a, b des fonctions continues sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (L)\ \forall x \in I,\quad f'(x) + a(x)f(x) = b(x) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Par tout point de coordonnées $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ passe une et une seule courbe intégrale.

En particulier, les courbes intégrales ne se croisent jamais sur I.

II Équations différentielles du second ordre

1 Définitions

Définition

On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL$_2$) toute équation du type

$$(L)\ \forall x \in D,\quad \alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = \delta(x)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, d'inconnue $y : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur D.

Résoudre ou **intégrer** (L), c'est en trouver toutes les solutions. Une courbe représentative de solution de (L) est appelée **courbe intégrale de** (L).

L'équation (H) $\forall x \in D,\ \alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = 0$ est appelée **équation homogène associée à** (L).

La résolution d'un problème du type

$$\begin{cases} \forall x \in D,\quad \alpha(x)y''(x) + \beta(x)y'(x) + \gamma(x)y(x) = \delta(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

avec $x_0 \in D$ et y_0, y'_0 fixé est appelé **problème de Cauchy**.

Seules sont au programmes les EDL$_2$ à cœfficients constants, de type

$$(L)\quad ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x)$$

avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et δ continue. L'équation homogène associée est

$$(H)\quad ay'' + by' + cy = 0$$

2 Résolution de l'équation homogène

Pour les EDL$_1$, les solutions sont naturellement apparues sous forme exponentielle.

Posons-nous la questions : quelles sont les $x \mapsto e^{rx}$ solutions ici ?

Réponse : $ar^2 + br + c = 0$.

Définition

$ar^2 + br + c = 0$ est l'**équation caractéristique** associée à (L).

Propriété

Soit (E) $ar^2 + br + c = 0$ équation caractéristique associée à (H) $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$.

(i) Si (E) possède deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$.

$$S_H = \left\{ \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

(ii) Si (E) possède une solution double $r \in \mathbb{K}$.

$$S_H = \left\{ \begin{array}{|ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & (A + Bx)e^{rx} \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

(iii) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si (E) ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$, il y a deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\omega \in \mathbb{C}$.

$$S_H = \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\alpha x} \end{array} \right. ; (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
$$= \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & A\cos(\omega x + \varphi)e^{\alpha x} \end{array} \right. ; (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3 Équations avec second membre

a Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $a,b,c \in \mathbb{K}$ et δ définie sur D, (L) $\forall x \in D$, $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x)$, S_L l'ensemble de ses solutions, (H) l'équation homogène associée est S_H l'ensemble de ses solutions.

Si f_0 est solution (particulière) de (L), alors

$$f \in S_L \Longleftrightarrow f - f_0 \in S_H$$

soit

$$S_L = \{f_0 + f,\ f \in S_H\} = f_0 + S_H.$$

Méthode : Résoudre une EDL$_2$

Pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta(x)$,

- on résout l'équation homogène associée $ay'' + by' + cy = 0$ à l'aide des solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$: les solutions sont les fonctions $x \mapsto Af_1(x) + Bf_2(x)$ avec $A, B \in \mathbb{K}$ et f_2, f_2 données par la propriété vue précédemment (on rappelle qu'il suffit de trouver deux solutions indépendantes ie non colinéaires).
- On cherche une solution particulière f_0.

Alors les solutions sont toutes les fonctions $x \mapsto f_0(x) + Af_1(x) + Bf_2(x)$ avec $A, B \in \mathbb{K}$.

Pour résoudre (L), il suffit donc de trouver **une** solution de (L) après avoir résolu (H). Comment faire ?

- Soit il y a une solution évidente,
- soit on utilise les techniques suivantes.

b Principe de superposition

Propriété

Soit D une partie de $\mathbb{R}$, $a,b,c \in \mathbb{K}$, δ définie sur D avec $\delta = \sum_{k=1}^{n} d_k\delta_k$ où les d_k sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, f_k est une solution particulière de $\forall x \in D$, $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \delta_k(x)$, alors $f_0 = \sum_{k=1}^{n} d_k f_k$ est solution de (L) $\forall x \in D$, $ay''(x) + by' + cy(x) = \delta(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k\delta_k(x)$.

c Cas de quelques seconds membres simples

Pas de méthode de variation des constantes au programme, mais il faut savoir trouver une solution particulière lorsque le second membre est simple (éventuellement après utilisation du principe de superposition).

- S'il est **constant**, c'est plutôt facile et en tout cas un cas particulier de ce qui suit (on a une solution particulière de la forme $x \mapsto C$ ou $x \mapsto Cx$ ou $x \mapsto Cx^2$.)

- S'il est **sous forme exponentielle**

Méthode : Résoudre une équation de la forme $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = Ae^{\lambda x}$

On sait trouver les solution de l'équation homogène. Reste à trouver une solution particulière. On utilise la propriété suivante :

Propriété

Une EDL$_2$ de la forme $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = Ae^{\lambda x}$ avec $A, \lambda \in \mathbb{K}$ admet une solution de la forme $x \mapsto Cx^k e^{\lambda x}$ où k est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc.)

Il suffit donc de poser $f_0 : x \mapsto Cx^k e^{\lambda x}$ et de traduire par équivalente que f_0 est solution pour trouver C.

On peut alors conclure en sommant f_0 et une solution quelconque de l'équation homogène associée.

- S'il est **sous forme polynôme-exponentielle**

Méthode : Résoudre une équation de la forme $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)e^{\lambda x}$

On sait trouver les solutions de l'équation homogène. Reste à trouver une solution particulière. On utilise la propriété suivante :

Propriété : Généralisation

Le résultat s'adapte si le second membre est de la forme $P(x)e^{\lambda x}$ où P polynôme : il existe une solution de la forme $x \mapsto Q(x)x^k e^{\lambda x}$ avec $\deg Q = \deg P$ et k est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ (0, 1 ou 2, donc.)

Il suffit donc de poser $f_0 : x \mapsto Q(x)x^k e^{\lambda x}$ avec Q de même degré que P et de traduire par équivalente que f_0 est solution pour trouver les cœfficients de Q.

On peut alors conclure en sommant f_0 et une solution quelconque de l'équation homogène associée.

- S'il est **sous forme d'un sinus ou d'un cosinus**

Méthode : Résoudre une équation de la forme $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = B\cos(\omega x)$ ou $B\sin(\omega x)$

Pour une EDL$_2$ de la forme

$$ay''(x)+by'(x)+cy(x) = B\cos(\omega x) \text{ ou } B\sin(\omega x)$$

avec $a, b, c, B, \omega \in \mathbb{R}$, on se ramène au cas des exponentielles en écrivant

$$\cos(\omega x) = \mathfrak{Re}\left(e^{i\omega x}\right) \text{ et } \sin(\omega x) = \mathfrak{Im}\left(e^{i\omega x}\right).$$

On a facilement que si f est solution de $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = Be^{i\omega x}$, alors, comme $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont solution de $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = B\cos(\omega x)$ et $ay''(x)+by'(x)+cy(x) = B\sin(\omega x)$ respectivement.

On trouvera donc une solution de la forme

$$x \mapsto x^k(C\cos(\omega x)+D\sin(\omega x))$$

où k est l'ordre de $\lambda = i\omega$ comme racine de l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$ (0, 1 ou 2, donc.)

- S'il est **polynomial** :

Méthode : Cas d'un second membre polynomial

On cherche une solution polynomiale en commençant par trouver le terme de plus haut degré : on écrit $f_0 : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ avec $a_n \neq 0$.

Puis on compare les termes de plus haut degré dans chaque membre de l'équation différentielle, ce qui permet de trouver n.

Enfin, on traduit par équivalence que notre fonction polynomiale du bon degré est solution ce qui permet de trouver ses cœfficients.

On peut aussi utiliser la propriété avec le second membre polynôme-exponentielle dans le cas où $\lambda = 0$.

d Existence et unicité de la solution au problème de Cauchy

Propriété

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, δ continue sur I, $x_0 \in I$ et $y_0, y_0' \in \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (L)\ \forall x \in I, \quad ay''(x)+by'(x)+cy(x) = \delta(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.