

Applications et relations

26 octobre 2022

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application de E dans F** toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F .

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application de E dans F** toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F .

Si on note f une application de E dans F ,

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, x \xrightarrow{f} y \text{ (lire « } f \text{ associe »)}$$

y est aussi noté $f(x)$.

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application de E dans F** toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F .

Si on note f une application de E dans F ,

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, x \xrightarrow{f} y \text{ (lire « } f \text{ associe »)}$$

y est aussi noté $f(x)$.

$$\text{On note } f : \left. \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right| \text{ ou } \left. \begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right|$$

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application de E dans F** toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F .

Si on note f une application de E dans F ,

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, x \xrightarrow{f} y \text{ (lire « } f \text{ associe »)}$$

y est aussi noté $f(x)$.

$$\text{On note } f : \left. \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right| \text{ ou } \left. \begin{array}{l} E \xrightarrow{f} F \\ x \longmapsto f(x) \end{array} \right|$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides.

On appelle **application de E dans F** toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F .

Si on note f une application de E dans F ,

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, x \xrightarrow{f} y \text{ (lire « } f \text{ associe »)}$$

y est aussi noté $f(x)$.

$$\text{On note } f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. \text{ ou } \left| \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$.

On note aussi $f : E \rightarrow F$ ou $E \xrightarrow{f} F$ pour $f \in F^E$.

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Egalité

Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F_2$.

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Egalité

Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F_2$.

On dit que $f_1 = f_2$ lorsque

- $E_1 = E_2$

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Egalité

Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F_2$.

On dit que $f_1 = f_2$ lorsque

- $E_1 = E_2$
- $F_1 = F_2$

Définition : Graphe

Soit $f : E \rightarrow F$.

L'ensemble $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$ est appelé **graphe** de f .

Définition : Image, antécédent

Soit $f : E \rightarrow F, x \in E, y \in F$.

Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Egalité

Soient $f_1 : E_1 \rightarrow F_1$ et $f_2 : E_2 \rightarrow F_2$.

On dit que $f_1 = f_2$ lorsque

- $E_1 = E_2$
- $F_1 = F_2$
- $\forall x \in E_1 = E_2, f_1(x) = f_2(x)$

Définition : Identité

On appelle **application identité de E** l'application

$$\text{id}_E : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

Définition : Identité

On appelle **application identité de E** l'application

$$\text{id}_E : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

Définition : Fonction indicatrice

Soit E ensemble et A partie de E .

Définition : Identité

On appelle **application identité de E** l'application

$$\text{id}_E : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array} \right.$$

Définition : Fonction indicatrice

Soit E ensemble et A partie de E .

On appelle **fonction indicatrice de A dans E** l'application

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \{0, 1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Propriété :

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\textcircled{i} \quad \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B.$$

Propriété :

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$(i) \quad \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B.$$

$$(ii) \quad \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$$

Propriété :

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

(i) $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B.$

(ii) $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$

(iii) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

Propriété :

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\text{(i)} \quad \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B.$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$$

$$\text{(iii)} \quad \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

$$\text{(iv)} \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Propriété :

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\text{(i)} \quad \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B.$$

$$\text{(ii)} \quad \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$$

$$\text{(iii)} \quad \mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

$$\text{(iv)} \quad \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

$$\text{(v)} \quad \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$$

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E .

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E . On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \begin{array}{l|l} A & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E . On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition : Application induite

Une application $g : A \rightarrow B$ est induite par $f : E \rightarrow F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée.

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E . On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \begin{array}{l|l} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition : Application induite

Une application $g : A \rightarrow B$ est induite par $f : E \rightarrow F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée.

Soit :

- $A \subset E$ et $B \subset F$

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E . On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition : Application induite

Une application $g : A \rightarrow B$ est induite par $f : E \rightarrow F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée.

Soit :

- $A \subset E$ et $B \subset F$
- $\forall x \in A, g(x) = f(x)$

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E . On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition : Application induite

Une application $g : A \rightarrow B$ est induite par $f : E \rightarrow F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée.

Soit :

- $A \subset E$ et $B \subset F$
- $\forall x \in A, g(x) = f(x)$

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vide de E . On appelle **restriction de f à A** l'application

$$f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Définition : Application induite

Une application $g : A \rightarrow B$ est induite par $f : E \rightarrow F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée.

Soit :

- $A \subset E$ et $B \subset F$
- $\forall x \in A, g(x) = f(x)$

Cela n'a de sens que si $\forall x \in A, f(x) \in B$.

Cas particuliers :

Cas particuliers :

Définition : Partie stable

Une partie A de E est dite **stable** par $f : E \rightarrow F$ lorsque $\forall x \in A, f(x) \in A$, ce qui se note $f(A) \subset A$.

Cas particuliers :

Définition : Partie stable

Une partie A de E est dite **stable** par $f : E \rightarrow F$ lorsque $\forall x \in A, f(x) \in A$, ce qui se note $f(A) \subset A$.

Définition :

Si $f : E \rightarrow E$ et A est stable par f , alors on peut parler de l'application induite par f sur A :

$$f_A : \begin{array}{l|l} A & \longrightarrow A \\ x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

Définition : Prolongement

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et E' tel que $E \subset E'$.

Définition : Prolongement

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et E' tel que $E \subset E'$.

On appelle **prolongement de f à E'** toute application $g : E' \rightarrow F$ telle que $\forall x \in E, g(x) = f(x)$ ie $g|_E = f$.

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$.

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \text{Im } f$ est appelé **image** de f .

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \text{Im } f$ est appelé **image** de f .

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \text{Im } f$ est appelé **image** de f .

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

(i) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ (Réciproque fautive)

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \text{Im } f$ est appelé **image** de f .

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

(i) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ (Réciproque fausse)

(ii) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

Définition : Image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \text{Im } f$ est appelé **image** de f .

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $A, A' \in \mathcal{P}(E)$.

- (i) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ (Réciproque fausse)
- (ii) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
- (iii) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ égalité fausse en général.

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$.

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

$$\boxed{\text{i}} \quad B \subset B' \Rightarrow f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$$

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

- (i) $B \subset B' \Rightarrow f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$
- (ii) $f^{(-1)}(B \cup B') = f^{(-1)}(B) \cup f^{(-1)}(B')$

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

- (i) $B \subset B' \Rightarrow f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$
- (ii) $f^{(-1)}(B \cup B') = f^{(-1)}(B) \cup f^{(-1)}(B')$
- (iii) $f^{(-1)}(B \cap B') = f^{(-1)}(B) \cap f^{(-1)}(B')$

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \iff f(x) \in B$.

Propriété :

Soit $f : E \rightarrow F$, $B, B' \in \mathcal{P}(F)$.

- (i) $B \subset B' \Rightarrow f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$
- (ii) $f^{(-1)}(B \cup B') = f^{(-1)}(B) \cup f^{(-1)}(B')$
- (iii) $f^{(-1)}(B \cap B') = f^{(-1)}(B) \cap f^{(-1)}(B')$
- (iv) $f^{(-1)}(\mathcal{C}_F B) = \mathcal{C}_E (f^{(-1)}(B))$

Définition : Composée

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

Définition : Composée

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On appelle **composée** de f par g

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

Définition : Composée

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On appelle **composée** de f par g

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

symbolisée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Définition : Composée

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On appelle **composée** de f par g

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{array} \right.$$

symbolisée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Propriété :

① Associativité : Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (= h \circ g \circ f)$$

Propriété :

(i) **Associativité** : Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (= h \circ g \circ f)$$

(ii) **Éléments neutres** : Soit $f : E \rightarrow F$. On a

Propriété :

(i) **Associativité** : Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (= h \circ g \circ f)$$

(ii) **Éléments neutres** : Soit $f : E \rightarrow F$. On a $\text{id}_F \circ f = f = f \circ \text{id}_E$.

Propriété :

(i) **Associativité** : Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ trois applications.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (= h \circ g \circ f)$$

(ii) **Éléments neutres** : Soit $f : E \rightarrow F$. On a $\text{id}_F \circ f = f = f \circ \text{id}_E$.

(iii) **La loi \circ n'est pas commutative** en général.

Définition : Itérées

Soit $f : E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \text{id}_E$

Définition : Itérées

Soit $f : E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \text{id}_E$
- $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$ si $n \geq 1$.

Définition : Itérées

Soit $f : E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \text{id}_E$
- $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$ si $n \geq 1$.

Définition : Itérées

Soit $f : E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \text{id}_E$
- $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$ si $n \geq 1$.

Définition : Applications involutives, idempotentes

Soit $f : E \rightarrow E$.

- Lorsque $f^2 = f \circ f = \text{id}_E$, on dit que f est une **involution** ou que f est **involutive**.

Définition : Itérées

Soit $f : E \rightarrow E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \text{id}_E$
- $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$ si $n \geq 1$.

Définition : Applications involutives, idempotentes

Soit $f : E \rightarrow E$.

- Lorsque $f^2 = f \circ f = \text{id}_E$, on dit que f est une **involution** ou que f est **involutive**.
- Lorsque $f^2 = f \circ f = f$, on dit que f est **idempotente**.

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection**

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection** ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection**

ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection**

ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution

ssi $\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection**

ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution

ssi $\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

ssi $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection**

ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution

ssi $\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

ssi $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$

Définition : Injectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **injective** ou une **injection**

ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution

ssi $\forall x, x' \in E, x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

ssi $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \implies x = x'$

Propriété : Composée d'injections

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont injectives, alors $g \circ f$ l'est encore.

La réciproque est fausse.

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection** ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**

ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**

ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution

ssi $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**

ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution

ssi $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**

ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution

ssi $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

Propriété : Caractérisation de la surjectivité par l'image

$f : E \rightarrow F$ est surjective ssi $\text{Im } f = f(E) = F$.

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**

ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution

ssi $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

Propriété : Caractérisation de la surjectivité par l'image

$f : E \rightarrow F$ est surjective ssi $\text{Im } f = f(E) = F$.

Propriété : Composée de surjections

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est encore.
La réciproque est fausse.

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijection** ou une **bijection**

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijective** ou une **bijection** ssi f est injective et surjective

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**

ssi f est injective et surjective

ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**

ssi f est injective et surjective

ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijjective** ou une **bijection**

ssi f est injective et surjective

ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution

ssi $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**

ssi f est injective et surjective

ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution

ssi $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**

ssi f est injective et surjective

ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution

ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$

Définition : Permutations

Soit E un ensemble non vide.

Définition : Bijektivité

Soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**

ssi f est injective et surjective

ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f

ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution

ssi $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$

Définition : Permutations

Soit E un ensemble non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans lui-même ($f : E \rightarrow E$).

L'ensemble des permutations de E se note $\mathfrak{S}(E)$.

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

(i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$
et $f \circ g = \text{id}_F$.

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

(i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

Lorsqu'elle existe une telle application est unique ; on l'appelle **réciproque** de f et on la note f^{-1} .

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

(i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

Lorsqu'elle existe une telle application est unique ; on l'appelle **réciproque** de f et on la note f^{-1} .

On a alors $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

- (i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

Lorsqu'elle existe une telle application est unique ; on l'appelle **réciproque** de f et on la note f^{-1} .

On a alors $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

- (ii) Si f est bijective,

$$\forall x \in E, \forall y \in F, [y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)]$$

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$.

- (i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.

Lorsqu'elle existe une telle application est unique ; on l'appelle **réciproque** de f et on la note f^{-1} .

On a alors $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

- (ii) Si f est bijective,

$$\forall x \in E, \forall y \in F, [y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)]$$

- (iii) Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, $f^{-1} : F \rightarrow E$ l'est aussi et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Propriété : Composée de bijections

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ bijectives, alors $g \circ f$ bijective.

Propriété : Composée de bijections

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ bijectives, alors $g \circ f$ bijective.
Réciproque fausse.

Propriété : Composée de bijections

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ bijectives, alors $g \circ f$ bijective.

Réciproque fausse.

On a alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition : Équipotence

Deux ensembles sont dits **équipotents** lorsqu'il existe une bijection allant de l'un vers l'autre.

Propriété : Composée de bijections

Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ bijectives, alors $g \circ f$ bijective.

Réciproque fausse.

On a alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition : Équipotence

Deux ensembles sont dits **équipotents** lorsqu'il existe une bijection allant de l'un vers l'autre.

Propriété : Image réciproque et image de la réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ bijective, $B \subset F$.

$$f^{(-1)}(B) = (f^{-1})(B).$$

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Γ est le **graphe** de \mathcal{R} .

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Γ est le **graphe** de \mathcal{R} .

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . \mathcal{R} est dite :

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Γ est le **graphe** de \mathcal{R} .

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . \mathcal{R} est dite :

- **réflexive** ssi $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Γ est le **graphe** de \mathcal{R} .

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . \mathcal{R} est dite :

- **réflexive** ssi $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- **symétrique** ssi $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Γ est le **graphe** de \mathcal{R} .

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . \mathcal{R} est dite :

- **réflexive** ssi $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- **symétrique** ssi $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- **antisymétrique** ssi $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble.

On appelle **relation binaire** \mathcal{R} sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y (ce qui se note $x\mathcal{R}y$) si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$.

Γ est le **graphe** de \mathcal{R} .

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit \mathcal{R} une relation binaire sur E . \mathcal{R} est dite :

- **réflexive** ssi $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- **symétrique** ssi $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- **antisymétrique** ssi $\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.
- **transitive** ssi $\forall x, y, z \in E, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive,

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo n** sur \mathbb{Z} par

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo n** sur \mathbb{Z} par

$$\begin{aligned} a \equiv b [n] &\iff n|(a - b) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + kn \\ &\iff a \text{ et } b \text{ ont même reste de division par } n. \end{aligned}$$

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo n** sur \mathbb{Z} par

$$\begin{aligned} a \equiv b [n] &\iff n|(a - b) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + kn \\ &\iff a \text{ et } b \text{ ont même reste de division par } n. \end{aligned}$$

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

- (i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo n** sur \mathbb{Z} par

$$\begin{aligned} a \equiv b [n] &\iff n|(a - b) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + kn \\ &\iff a \text{ et } b \text{ ont même reste de division par } n. \end{aligned}$$

- (ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo α** sur \mathbb{R} par

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

- (i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo n** sur \mathbb{Z} par

$$\begin{aligned}a \equiv b [n] &\iff n|(a - b) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, a = b + kn \\ &\iff a \text{ et } b \text{ ont même reste de division par } n.\end{aligned}$$

- (ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo α** sur \mathbb{R} par

$$x \equiv y [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = y + k\alpha$$

Propriété :

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Propriété :

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Définition : Classes d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.

Propriété :

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Définition : Classes d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.

On appelle **classe d'équivalence** de x pour \mathcal{R} l'ensemble

$$\bar{x} = \text{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

que l'on note aussi \dot{x} , $\text{cl}(x)$ ou $[x]$ ou $\text{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ ou $[x]_{\mathcal{R}}$ s'il y a ambiguïté.

Propriété :

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Définition : Classes d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.

On appelle **classe d'équivalence** de x pour \mathcal{R} l'ensemble

$$\bar{x} = \text{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

que l'on note aussi \dot{x} , $\text{cl}(x)$ ou $[x]$ ou $\text{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ ou $[x]_{\mathcal{R}}$ s'il y a ambiguïté.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour \mathcal{R} est l'**ensemble quotient** noté E/\mathcal{R} . C'est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Propriété :

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Définition : Classes d'équivalence

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.

On appelle **classe d'équivalence** de x pour \mathcal{R} l'ensemble

$$\bar{x} = \text{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

que l'on note aussi \dot{x} , $\text{cl}(x)$ ou $[x]$ ou $\text{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ ou $[x]_{\mathcal{R}}$ s'il y a ambiguïté.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour \mathcal{R} est l'**ensemble quotient** noté E/\mathcal{R} . C'est une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Si $X \in E/\mathcal{R}$, on a $x \in E$ tel que $X = \text{cl}(x)$. On dit que x est un **représentant** de X .

Propriété :

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

Propriété :

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

$$\text{① } \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$$

Propriété :

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

$$\text{(i)} \quad \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$$

$$\text{(ii)} \quad \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \text{ ou } \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset.$$

Propriété :

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

$$\text{(i)} \quad \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$$

$$\text{(ii)} \quad \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \text{ ou } \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset.$$

$$\text{(iii)} \quad \bigcup_{x \in E} \text{cl}(x) = E$$

Propriété :

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E .

$$(i) \quad \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \iff x\mathcal{R}y$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in E, \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y) \text{ ou } \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset.$$

$$(iii) \quad \bigcup_{x \in E} \text{cl}(x) = E$$

(iv) Les classes d'équivalence (donc E/\mathcal{R}) forment une partition de E .

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire \preceq réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire \leq réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsqu'une telle relation \leq existe, on dit que (E, \leq) est un **ensemble ordonné**.

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire \triangleleft réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsqu'une telle relation \triangleleft existe, on dit que (E, \triangleleft) est un **ensemble ordonné**.

Définition : Ordre total, partiel

Une ordre \triangleleft sur E est dit **total** lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \triangleleft y \text{ ou } y \triangleleft x$$

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire \triangleleft réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsqu'une telle relation \triangleleft existe, on dit que (E, \triangleleft) est un **ensemble ordonné**.

Définition : Ordre total, partiel

Une ordre \triangleleft sur E est dit **total** lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \triangleleft y \text{ ou } y \triangleleft x$$

(E, \triangleleft) est alors **totalelement ordonné**.

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire \triangleleft réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsqu'une telle relation \triangleleft existe, on dit que (E, \triangleleft) est un **ensemble ordonné**.

Définition : Ordre total, partiel

Une ordre \triangleleft sur E est dit **total** lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \triangleleft y \text{ ou } y \triangleleft x$$

(E, \triangleleft) est alors **totalelement ordonné**.

Sinon, c'est un ordre **partiel** et (E, \triangleleft) est un **ensemble partiellement ordonné**, ce qui se traduit par

$$\exists x, y \in E, \quad x \not\triangleleft y \text{ et } y \not\triangleleft x$$

Définition : Majorants, minorants

Soit (E, \leq) ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Définition : Majorants, minorants

Soit (E, \leq) ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** dans E de (ou **major**) x lorsque $x \leq M$.

Définition : Majorants, minorants

Soit (E, \leq) ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** dans E de (ou **majore**) x lorsque $x \leq M$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** de (ou **majore**) A lorsqu'il majore tous ses éléments :

$$\forall a \in A, a \leq M$$

Définition : Majorants, minorants

Soit (E, \leq) ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** dans E de (ou **majore**) x lorsque $x \leq M$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** de (ou **majore**) A lorsqu'il majore tous ses éléments :

$$\forall a \in A, a \leq M$$

On dit que $m \in E$ est un **minorant** dans E de (ou **minore**) x lorsque $m \leq x$.

Définition : Majorants, minorants

Soit (E, \leq) ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** dans E de (ou **majore**) x lorsque $x \leq M$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** de (ou **majore**) A lorsqu'il majore tous ses éléments :

$$\forall a \in A, a \leq M$$

On dit que $m \in E$ est un **minorant** dans E de (ou **minore**) x lorsque $m \leq x$.

On dit que $m \in E$ est un **minorant** de (ou **minore**) A lorsqu'il minore tous ses éléments :

$$\forall a \in A, m \leq a$$

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On appelle **plus grand élément** ou **maximum** de A , s'il existe, tout $g \in A$ tel que g majore A :

$$\forall a \in A, a \leq g$$

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On appelle **plus grand élément** ou **maximum** de A , s'il existe, tout $g \in A$ tel que g majore A :

$$\forall a \in A, a \leq g$$

On appelle **plus petit élément** ou **minimum** de A , s'il existe, tout $p \in A$ tel que p minore A :

$$\forall a \in A, p \leq a$$

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On appelle **plus grand élément** ou **maximum** de A , s'il existe, tout $g \in A$ tel que g majore A :

$$\forall a \in A, a \leq g$$

On appelle **plus petit élément** ou **minimum** de A , s'il existe, tout $p \in A$ tel que p minore A :

$$\forall a \in A, p \leq a$$

Propriété : Unicité

S'il y a un plus grand élément, il est unique et on le note $\max A$.

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

On appelle **plus grand élément** ou **maximum** de A , s'il existe, tout $g \in A$ tel que g majore A :

$$\forall a \in A, a \leq g$$

On appelle **plus petit élément** ou **minimum** de A , s'il existe, tout $p \in A$ tel que p minore A :

$$\forall a \in A, p \leq a$$

Propriété : Unicité

S'il y a un plus grand élément, il est unique et on le note $\max A$.

S'il y a un plus petit élément, il est unique et on le note $\min A$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Si l'ensemble des majorants de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Si l'ensemble des majorants de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorants de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Si l'ensemble des majorants de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorants de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Propriété :

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Si l'ensemble des majorants de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorants de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Propriété :

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

(i) $\sup A$ existe et $\sup A \in A \Rightarrow \max A$ existe et vaut $\sup A$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Si l'ensemble des majorants de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorants de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Propriété :

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

(i) $\sup A$ existe et $\sup A \in A \Rightarrow \max A$ existe et vaut $\sup A$.

(ii) $\max A$ existe $\Rightarrow \sup A$ existe et vaut $\max A$.

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

Si l'ensemble des majorants de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorants de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Propriété :

Soit (E, \leq) ordonné, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

(i) $\sup A$ existe et $\sup A \in A \Rightarrow \max A$ existe et vaut $\sup A$.

(ii) $\max A$ existe $\Rightarrow \sup A$ existe et vaut $\max A$.

(idem avec inf et min.)

Théorème :

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Théorème :

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Corollaire :

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Théorème :

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Corollaire :

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Propriété : Caractérisation du sup et de l'inf

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha & (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall M' \in \mathbb{R} \mid M' < \alpha, \exists x \in A, M' < x \\ & (\text{Pas de majorant plus petit}) \end{cases}$$

Théorème :

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Corollaire :

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Propriété : Caractérisation du sup et de l'inf

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha & (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall M' \in \mathbb{R} \mid M' < \alpha, \exists x \in A, M' < x \\ & (\text{Pas de majorant plus petit}) \end{cases}$$
$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x & (\beta \text{ minore } A) \\ \forall m' \in \mathbb{R} \mid \beta < m', \exists x \in A, x < m' \\ & (\text{Pas de minorant plus grand}) \end{cases}$$

Propriété : Énoncé local

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha & (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \\ & (\text{Pas de majorant plus petit}) \end{cases}$$

Propriété : Énoncé local

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha & (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x & (\text{Pas de majorant plus petit}) \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x & (\beta \text{ minore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon & (\text{Pas de minorant plus grand}) \end{cases}$$

Propriété : Énoncé local

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha & (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \\ & (\text{Pas de majorant plus petit}) \end{cases}$$
$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x & (\beta \text{ minore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon \\ & (\text{Pas de minorant plus grand}) \end{cases}$$

Propriété : Caractérisation séquentielle

La borne supérieure de A est le seul majorant limite d'une suite d'éléments de A .

Propriété : Énoncé local

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha & (\alpha \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \\ & (\text{Pas de majorant plus petit}) \end{cases}$$
$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x & (\beta \text{ minore } A) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < \beta + \varepsilon \\ & (\text{Pas de minorant plus grand}) \end{cases}$$

Propriété : Caractérisation séquentielle

La borne supérieure de A est le seul majorant limite d'une suite d'éléments de A .

La borne inférieure de A est le seul minorant limite d'une suite d'éléments de A .