Devoir Libre n° 5

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier $\boxed{\text{encadrer}}$ les réponses, <u>tirer un trait</u> entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).
La rédaction est à soigner tout particulièrement !
N'hésitez à me demander des indications par mail.
Toute production qui ne serait pas personnelle est pure perte de temps (pour vous et pour moi...) Merci !

Exercice 1 – Fonctions usuelles

1. Une simplification

1.a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction

$$f \;:\; x \mapsto \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\, x) + \mathrm{Arccos}(\mathrm{th}\, x).$$

1.b) Calculer f' et en déduire une expression simplifiée de f.

2. Une fonction hyperbolique réciproque

2.a) Justifier que la fonction sh est bijective. Sa réciproque est notée Argsh.

2.b) En tracer le graphe.

2.c) Déterminer le domaine de dérivation de Argsh et calculer sa dérivée.

2.d) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Exercice 2 – Calculs de primitives et équations différentielles

1. Calculer, sur des intervalles à préciser, les primitives suivantes :

1.a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{2x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x.$

1.b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2x^2}}.$

1.c) $\displaystyle\int x(1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$ puis $\displaystyle\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x.$

1.d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x)\,\mathrm{ch}\, x}.$

2. Résoudre l'équation différentielle sur un ou des intervalle(s) à préciser. *Rédiger avec soin !*

$$(L)\ \mathrm{ch}\, x\ \ y'(x) - \mathrm{sh}\, x\ \ y(x) = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x - \mathrm{ch}\, x}$$

Exercice 3 – Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

Lien entre I_n et J_n

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.

Calcul de I_n et de sa limite

2. Calculer I_0, I_1.

3. Pour $n \geqslant 2$, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} en faisant une intégration par parties judicieuse.

4. En déduire pour $p \in \mathbb{N}$ les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} **sous forme simplifiée**.

5. Montrer que la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et déterminer cette constante.

Cette relation participe à la démonstration de la formule de Stirling :

Le comportement de $n!$ au voisinage de $+\infty$ est celui de $\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

6. On admet que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie. Que vaut-elle ?

Une autre intégrale

7. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Calcul alternatif de I_{2p}

On propose de calculer I_{2p} avec une autre méthode.

8. Calculer, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2imx}\,\mathrm{d}x$.

On donnera un résultat très simple et on fera particulièrement attention au cas $m = 0$.

9. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(p-k)x}\,\mathrm{d}x$

La linéarité de l'intégrale dit que l'intégrale d'une somme est la somme des intégrales...

10. En exprimant $\cos x$ à l'aide de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$, calculer $\displaystyle K_{2p} = \int_0^{\pi} \cos^{2p} x\,\mathrm{d}x$.

11. Justifier à l'aide d'un changement de variable que $\displaystyle I_{2p} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^{2p} x\,\mathrm{d}x$ et en déduire une expression I_{2p} en fonction de K_{2p}.

12. Retrouver l'expression de I_{2p}.