

Devoir Libre n° 5

Exercice 1 – Fonctions usuelles

1.a) Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th } x \in]-1, 1[$, f est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

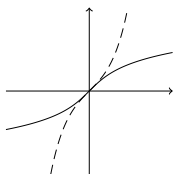
1.b) On calcule $f' \equiv 0$ sur \mathbb{R} et comme il s'agit d'un intervalle,

$$f \equiv f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

2.a) La fonction sh est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} donc est

$$\text{bijective de } \mathbb{R} \text{ sur } \text{sh}(\mathbb{R}) = \left] \lim_{-\infty} \text{sh}, \lim_{+\infty} \text{sh} \right[= \mathbb{R}.$$

2.b)



2.c) Comme sh est bijective, dérivable sur \mathbb{R} et $\text{sh}' = \text{ch}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} ,

Argsh est dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, si $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\text{sh}'(\text{Argsh } x)} = \frac{1}{\text{ch}(\text{Argsh } x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2(\text{Argsh } x)}}$$

car $\text{ch} > 0$. Donc

$$\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

2.d) Si $y = \text{Argsh}(x)$, alors $\text{sh } y = x$ et $\text{ch } y = \sqrt{1 + \text{sh}^2 y} = \sqrt{1 + x^2}$.

Comme $\text{sh } y + \text{ch } y = e^y$, on en déduit que $y = \text{Argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Exercice 2 – Calculs de primitives et équations différentielles

1.a) Le discriminant réduit de $2t^2 + 2t + 3 \equiv 0$ est $-5 < 0$, on primitive donc $\int_{\mathbb{R}}$ et

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{2x^2+2x+3} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(4x+2)-2}{2x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+3) - 2 \int \frac{1}{\left(\sqrt{2x+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 + \frac{5}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+3) - \frac{4}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+3) - \frac{4\sqrt{5}}{5 \cdot 2} \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C. \end{aligned}$$

Donc $\int \frac{2x-1}{2x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(2x^2+2x+3) - \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{Arctan}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

1.b) $x - 2x^2 = x(1-2x)$ donc on intègre $\int_{\left]0, \frac{1}{2}\right[}$ et

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-2x^2}} dt = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8} - \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}} dx = \int \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-(4x-1)^2}} dx$$

donc $\int \frac{1}{\sqrt{x-2x^2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Arcsin}(4x-1) + C$.

1.c) Sur $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ où $k \in \mathbb{Z}$, on procède à une intégration par parties, $x \mapsto x$ et

\tan étant de classe \mathcal{C}^1 sur I_k , $\int x(1 + \tan^2 x) dx = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$ donc

$$\int x(1 + \tan^2 x) dx = x \tan x + \ln|\cos x| + C_k \quad \text{puis} \quad \int x \tan^2 x dx = x \tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C_k.$$

1.d) Comme $(\text{sh } x - \text{ch } x) \text{ch } x = -e^{-x} \text{ch } x \neq 0$, on intègre $\int_{\mathbb{R}}$, les règles de Bioche nous proposent le changement de variable $t = \text{th } x$, $dt = \frac{dx}{\text{ch}^2 x}$:

$$\int \frac{dx}{(\text{sh } x - \text{ch } x) \text{ch } x} = \int \frac{dx}{(\text{th } x - 1) \text{ch}^2 x} = \int \frac{dt}{t-1} = \ln|t-1| + C$$

Donc $\int \frac{dx}{(\text{sh } x - \text{ch } x) \text{ch } x} = \ln(1 - \text{th } x) + C$.

On aurait aussi pu poser $t = e^x$.

2. ch , $-\text{sh}$ et $\frac{\text{ch}}{\text{sh}-\text{ch}}$ sont continues sur \mathbb{R} et ch ne s'annule pas sur \mathbb{R} donc on résout sur l'intervalle \mathbb{R} .

Comme $\int \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} dx = \ln(\text{ch } x) + C$, les solutions de l'équation homogène associée sur \mathbb{R} sont les fonctions λch pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

On cherche, par la méthode de variation de la constante, une solution particulière de (L) de la forme $f_0 : x \mapsto \lambda(x) \text{ch } x$ avec λ dérivable sur \mathbb{R} .

$$f_0 \text{ est solution de (L)} \iff \text{ch} \cdot \lambda' \cdot \text{ch} = \frac{\text{ch}}{\text{sh}-\text{ch}} \iff \lambda' = \frac{1}{(\text{sh}-\text{ch})\text{ch}}$$

D'après la question précédente, on peut choisir $\lambda = \ln(1-\text{th})$ et on obtient que les solutions de (L) sur \mathbb{R} sont les fonctions $(\ln(1-\text{th}) + \lambda) \text{ch}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Autre rédaction possible :

$$(L) \iff \left(\frac{y}{\text{ch}}\right)' = \frac{1}{(\text{ch}-\text{sh})\text{ch}} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \frac{y}{\text{ch}} = \ln(1-\text{th}) + \lambda \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = (\ln(1-\text{th}) + \lambda) \text{ch}.$$

Exercice 3 – Intégrales de Wallis

1. Un changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$ donne directement $I_n = J_n$.

2. On calcule $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

3. Par intégration par parties, et \sin^{n-1} et \cos étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x \cos x) \cos x dx \\ &= I_{n-2} - \left[\frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n \end{aligned}$$

Ce qui donne finalement $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ou encore $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

4. On a donc, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3}{2p(2p-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{\pi}{2}$ donc

$$I_{2p} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2} \text{ et } I_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\cdots 2}{(2p+1)(2p-1)\cdots 3} I_1 = \frac{2^p p!}{(2p+1)!} \text{ donc } I_{2p+1} = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

5. Si $n \geq 3$, d'après la question 3, $nI_n I_{n-1} = (n-1)I_{n-2} I_{n-1} = (n-1)I_{n-1} I_{n-2}$.

Donc la suite $(nI_n I_{n-1})$ est constante. Cette constante vaut $I_1 I_0 = \frac{\pi}{2}$.

6. Si $I_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, $I_n I_{n-1} \rightarrow \ell^2$ et comme $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, nécessairement $\ell = 0$.

7. Avec un changement de variable $t = \cos x$, on obtient

$$\int_0^1 (1-t^2)^n dt = I_{2n+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

8.a) Si $m = 0$, $\int_0^\pi e^{2i \times 0 \times x} dx = \pi$. Sinon $\int_0^\pi e^{2imx} dx = \left[\frac{e^{2imx}}{2im} \right]_0^\pi = 0$.

$$8.b) \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)x} dx = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \int_0^\pi e^{2i(p-k)x} dx$$

Donc $\int_0^\pi \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{2i(p-k)x} dx = \binom{2p}{p} \pi$ d'après la question précédente.

8.c) D'après les formules d'Euler et du binôme,

$$K_{2p} = \int_0^\pi \cos^{2p} x dx = \int_0^\pi \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2p} dx = \frac{1}{2^{2p}} \int_0^\pi \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{-ikx} e^{i(2p-k)x} dx$$

donc d'après la question précédente, $K_{2p} = \frac{\binom{2p}{p} \pi}{2^{2p}}$.

8.d) A l'aide du changement de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^{2p} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p} y dy = I_{2p}$$

donc $K_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^{2p} x dx$ donc $K_{2p} = 2I_{2p}$.

8.e) Donc $I_{2p} = \frac{\binom{2p}{p} \pi}{2^{2p+1}} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}$.

Fin