Devoir Libre n° 6

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).
La rédaction est à soigner tout particulièrement !
N'hésitez à me demander des indications par mail.
Toute production qui ne serait pas personnelle est pure perte de temps (pour vous et pour moi...) Merci !

Exercice 1 – Complexes

Les questions sont indépendantes.

1. Déterminer les racines $8^{\text{èmes}}$ du nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{-3+3\sqrt{3}\mathrm{i}}$.

2. Résoudre, sur $\mathbb{C}$, l'équation différentielle $(1+\mathrm{i})y''(x)+(1+4\mathrm{i})y'(x)+5y(x)=0$.

3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $y''(x)+(1-\mathrm{i})y'(x)-\mathrm{i}y(x)=\mathrm{e}^{ix}$.

Exercice 2 – Équation différentielle d'ordre 1

On considère l'équation différentielle

$$(L)\ \left(1-x^2\right)y'(x)+xy(x)+1=0$$

1. Résoudre (L) sur les trois intervalles sur lesquels cela est possible.

2. Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, les préciser.

Exercice 3 – Équation différentielle d'Euler

Dans tout le problème, $g:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est une application continue.
Pour $a,b\in\mathbb{R}$ fixés, on considère l'équation différentielle (dite d'Euler[1])

$$(L)\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+^*,\quad t^2y''(t)+aty'(t)+by(t)=g(t).$$

1. Montrer que $t\mapsto t^\alpha$ est solution de l'équation homogène associée si et seulement si α est racine du polynôme $P=X(X-1)+aX+b$.

2. Pour toute $y:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, on définit $z=y\circ\exp$. Montrer que y est solution de (L) si et seulement si z est solution de

$$(L')\ \forall\, x\in\mathbb{R},\quad z''(x)+(a-1)z'(x)+bz(x)=g(\mathrm{e}^x).$$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

3.a) $(L_1)\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+^*,\quad t^2y''(t)+5ty'(t)+4y(t)=t.$

3.b) $(L_2)\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+^*,\quad t^2y''(t)+y(t)=t+\dfrac{1}{t}.$

4. Trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $\forall\, t>0,\quad f'(t)=f\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

1.

Leonhard Euler (Bâle, 1707 - Saint-Petersbourg 1783) est un scientifique suisse à l'œuvre considérable en astronomie, en sciences physiques et en mathématiques. Il est entre autre à l'origine du concept de fonction qui permis à l'analyse de se développer, de la formule qui porte son nom reliant le nombre de S sommet, A d'arrêtes et F de faces d'un polyèdre convexe : $F-A+S=2$. Il fit d'importantes découvertes en calcul différentiel et intégral, géométrie et théorie des nombre. On lui doit par exemple la formule $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ou la relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$. C'est d'ailleurs lui qui introduisit le symbole Σ pour les sommations. Il fût aveugle pendant 12 ans, ce qui ne l'empêcha pas d'être extraordinairement prolifique avec 886 ouvrages réunis en 80 volumes.