Devoir Libre n° 7

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier $\boxed{\text{encadrer}}$ les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).
La rédaction est à soigner tout particulièrement !
N'hésitez à me demander des indications par mail.
Deux sujets au choix. Le second est plus corsé !

Sujet 1 – MP2I

Exercice 1 : Applications

Les questions sont indépendantes.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $c \neq 0$ et $a^2 + bc \neq 0$. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. On considère $f : \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx-a} \end{array}$.
   (a) Justifier que l'application f est bien définie.
   (b) Calculer $f \circ f$. En déduire que f est une bijection dont on déterminera l'application réciproque.
2. Soient E, F, G trois ensembles, $f_1, f_2 : E \to F$ et $g : F \to G$. On suppose que $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et que g est injective. Montrer que $f_1 = f_2$.

Exercice 2 : Relation d'équivalence

On considère sur E^E la relation binaire $\mathscr{R}$ définie par

$$f \mathscr{R} g \iff \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E), \ \ f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence d'une fonction $f \in E^E$ fixée.

Exercice 3 : Relation d'ordre produit

Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \trianglelefteq)$ deux ensembles ordonnés, $\mathscr{P}$ la relation définie sur $E \times F$ par

$$(x,y) \mathscr{P} (x',y') \iff \left\{ \begin{array}{l} x \preccurlyeq x' \\ y \trianglelefteq y' \end{array} \right.$$

(Attention aux différentes notations et à la rigueur de la rédaction !)

1. Montrer que $\mathscr{P}$ est un ordre sur $E \times F$ appelé *ordre produit* des ordres de E et F.
2. On prend ici $E = F = \mathbb{R}$ muni de son ordre usuel.
   (a) Préciser, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des majorants de (x,y) dans $\mathbb{R}^2$ pour $\mathscr{P}$. Faire une représentation graphique.
   (b) L'ordre $\mathscr{P}$ est-il total dans $\mathbb{R}^2$?
   (c) Est-ce que $(\mathbb{R}_-^*)^2$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}^2$ pour $\mathscr{P}$? Si oui, la préciser.

Sujet 2 – MP2I*

Exercice 1 : Applications

Soit E, F deux ensembles non vides. À chaque fonction $f : E \to F$, on associe les deux fonctions

$$\mathbb{F} : \begin{array}{|lcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \qquad \mathbb{G} : \begin{array}{|lcl} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & f^{(-1)}(B) \end{array}$$

1. (a) Montrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $\mathbb{F} \circ \mathbb{G}(B) = B \cap f(E)$.
   (b) Simplifier $\mathbb{G} \circ \mathbb{F} \circ \mathbb{G}$ et $\mathbb{F} \circ \mathbb{G} \circ \mathbb{F}$.
2. Montrer
   $$f \text{ injective} \iff \mathbb{F} \text{ injective} \quad \text{et} \quad f \text{ surjective} \iff \mathbb{F} \text{ surjective}$$
   et
   $$f \text{ injective} \iff \mathbb{G} \text{ surjective} \quad \text{et} \quad f \text{ surjective} \iff \mathbb{G} \text{ injective}$$
   (Utiliser 1.a. Pour $\mathbb{G}$ surjective $\Longrightarrow f$ injective, on peut raisonner par l'absurde.)
3. Soit $\pi : \begin{array}{|lcl} F^E & \longrightarrow & \mathscr{P}(F)^{\mathscr{P}(E)} \\ f & \longmapsto & \mathbb{F} \end{array}$ Montrer que π est injective et non surjective.
   (Pour cette dernière, on pourra introduire une fonction constante bien choisie).
4. Soit $\Theta : \begin{array}{|lcl} F^E & \longrightarrow & \mathscr{P}(E)^{\mathscr{P}(F)} \\ f & \longmapsto & \mathbb{G} \end{array}$ Montrer que Θ est injective.

Exercice 2 : Une relation d'ordre sur les partitions d'un ensemble fini (d'après ENS Ulm)

On pose $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1, n]\!]$.
On rappelle qu'une **partition** de E est un ensemble fini $P = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$ de parties de E vérifiant

(a) $\forall i \in [\![1, s]\!], \ \ P_i \neq \varnothing$ (b) $E = \displaystyle\bigcup_{i \in [\![1,s]\!]} P_i$ (c) $\forall i, j \in [\![1, s]\!] \mid i \neq j, \ P_i \cap P_j = \varnothing$.

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des partitions de E.

On dit qu'une partition $\{Q_1, \dots, Q_t\}$ de E est **plus fine** qu'une partition $\{P_1, \dots, P_s\}$ et on note $P \leqslant Q$ si pour tout $i \in [\![1, s]\!]$,

$$P_i = \bigcup_{j \in J_i} Q_j$$

où J_i d'ésigne l'ensemble des entiers j de $[\![1, t]\!]$ tels que $P_i \cap Q_j \neq \varnothing$.

1. On note $P_+ = \big\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\big\}$ (contenant n éléments) et $P_- = \{E\}$ (contenant un seul élément). Montrer que P_- et P_+ sont des partitions de E.
2. Montrer que si $P \in \mathscr{P}$, $P_- \leqslant P \leqslant P_+$.
3. Soient $P, Q \in \mathscr{P}$, avec les notations $P = \{P_1, \dots, P_s\}$ et $Q = \{Q_1, \dots, Q_t\}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
   (i) $P \leqslant Q$
   (ii) Pour tous $i \in [\![1, s]\!]$ et $j \in [\![1, t]\!]$, $P_i \cap Q_j \neq \varnothing \Longrightarrow Q_j \subset P_i$.
4. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}$.
5. Montrer que l'ordre est total si et seulement si $n \leqslant 2$.