Chapitre IX

Applications et relations

I Applications

1 Définitions

Définition : Application

Soient E et F deux ensembles non vides. On appelle **application de** E **dans** F toute relation qui à chaque élément de E associe un unique élément de F.

Si on note f une application de E dans F,

$$\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F,\ x \overset{f}{\mapsto} y \text{ (lire « f associe »)}$$

y est aussi noté $f(x)$.

On note $f: \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ ou $\begin{array}{|lcl} E & \overset{f}{\longrightarrow} & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$

L'ensemble des applications de E dans F est noté F^E ou $\mathscr{F}(E,F)$.

On note aussi $f: E \to F$ ou $E \overset{f}{\to} F$ pour $f \in F^E$.

Définition : Graphe

Soit $f: E \to F$. L'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x,y) \mid x \in E \text{ et } y = f(x)\}$$

est appelé **graphe** de f.

Définition : Image, antécédent

Soit $f: E \to F, x \in E, y \in F$. Lorsque $y = f(x)$, on dit que

- y est l'**image** de x par f
- x est **UN antécédent** de y par f

Définition : Egalité

Soient $f_1: E_1 \to F_1$ et $f_2: E_2 \to F_2$.
On dit que $f_1 = f_2$ lorsque

- $E_1 = E_2$
- $F_1 = F_2$
- $\forall x \in E_1 = E_2,\ f_1(x) = f_2(x)$

Définition : Identité

On appelle **application identité de** E l'application

$$\mathrm{id}_E: \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$$

Définition : Fonction indicatrice

Soit E ensemble et A partie de E. On appelle **fonction indicatrice de** A **dans** E l'application

$$\mathbb{1}_A: \begin{array}{|lcl} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Propriété

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

(i) $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \iff A = B$.

(ii) $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$

(iii) $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$

(iv) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

(v) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$

2 Restrictions, prolongements

a Restriction, application induite

Définition : Restriction

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et A une partie non vie de E.

On appelle **restriction de** f **à** A l'application

$$f|_A: \begin{array}{|lcl} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Définition : Application induite

Une application $g: A \to B$ est induite par $f: E \to F$ si g est une restriction de f au départ et à l'arrivée. Soit :

- $A \subset E$ et $B \subset F$
- $\forall x \in A,\ \ g(x) = f(x)$

Cela n'a de sens que si $\forall x \in A,\ \ f(x) \in B$.

Cas particuliers :

Définition : Partie stable

Une partie A de E est dite **stable** par $f: E \to F$ lorsque $\forall x \in A,\ \ f(x) \in A$, ce qui se note $f(A) \subset A$.

Définition

Si $f: E \to E$ et A est stable par f, alors on peut parler de l'application induite par f sur A :

$$f_A: \begin{array}{|lcl} A & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

b Prolongement

Définition : Prolongement

Soient E, F deux ensembles non vides, $f \in F^E$ et E' tel que $E \subset E'$.
On appelle **prolongement de f à E'** toute application $g : E' \to F$ telle que $\forall x \in E,\ \ g(x) = f(x)$ ie $g|_E = f$.

3 Images directe et réciproque

a Image directe

Définition : Image directe

Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$. On appelle **image directe** de A par f

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F$$

Si $y \in F$,

$$y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ \ y = f(x)$$

En particulier, $f(E) = \operatorname{Im} f$ est appelé **image** de f.

Propriété

Soit $f : E \to F,\ A, A' \in \mathscr{P}(E)$.

(i) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$ *(Réciproque fausse)*

(ii) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$

(iii) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ *égalité fausse en général.*

b Image réciproque

Définition : Image réciproque

Soit $f : E \to F$, $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B par f

$$f^{(-1)}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E.$$

Si $x \in E$, $x \in f^{(-1)}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$.

Propriété

Soit $f : E \to F,\ B, B' \in \mathscr{P}(F)$.

(i) $B \subset B' \Rightarrow f^{(-1)}(B) \subset f^{(-1)}(B')$

(ii) $f^{(-1)}(B \cup B') = f^{(-1)}(B) \cup f^{(-1)}(B')$

(iii) $f^{(-1)}(B \cap B') = f^{(-1)}(B) \cap f^{(-1)}(B')$

(iv) $f^{(-1)}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{(-1)}(B)}$

4 Composition

a Definition

Définition : Composée

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle **composée** de f par g

$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

symbolisée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

b Propriétés

Propriété

(i) ***Associativité*** *: Soient $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ trois applications.*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (= h \circ g \circ f)$$

(ii) ***Éléments neutres*** *: Soit $f : E \to F$. On a $\mathrm{id}_F \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_E$.*

(iii) ***La loi $\circ$ n'est pas commutative*** *en général.*

c Itérées

Définition : Itérées

Soit $f : E \to E$, $n \in \mathbb{N}$. On définit la n^{ie} itérée de f par

- $f^0 = \mathrm{id}_E$
- $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} = f \circ f^{n-1} = f^{n-1} \circ f$ si $n \geqslant 1$.

Définition : Applications involutives, idempotentes

Soit $f : E \to E$.

- Lorsque $f^2 = f \circ f = \mathrm{id}_E$, on dit que f est une **involution** ou que f est **involutive**.
- Lorsque $f^2 = f \circ f = f$, on dit que f est **idempotente**.

5 Injectivité, surjectivité, bijectivité

a Injectivité

Définition : Injectivité

Soit $f : E \to F$. f est dite **injective** ou une **injection**
ssi tout $y \in F$ admet **au plus** un antécédent par f
ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet soit aucune soit une seule solution
ssi $\forall x, x' \in E,\ \ x \neq x' \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$
ssi $\boxed{\forall x, x' \in E,\ \ f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'}$

Propriété : Composée d'injections

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont injectives, alors $g \circ f$ l'est encore. La réciproque est fausse.

b Surjectivité

Définition : Surjectivité

Soit $f : E \to F$. f est dite **surjective** ou une **surjection**
ssi tout $y \in F$ admet **au moins** un antécédent par f
ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet au moins une solution
ssi $\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ \ y = f(x)$

Propriété : Caractérisation de la surjectivité par l'image

$f : E \to F$ est surjective ssi $\operatorname{Im} f = f(E) = F$.

Propriété : Composée de surjections

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est encore. La réciproque est fausse.

c Bijectivité

Définition : Bijectivité

Soit $f : E \to F$. f est dite **bijective** ou une **bijection**
ssi f est injective et surjective
ssi tout $y \in F$ admet **exactement** un antécédent par f
ssi pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in E$ admet une et une seule solution
ssi $\forall y \in F, \ \exists! x \in E, \ \ y = f(x)$

Définition : Permutations

Soit E un ensemble non vide. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans lui-même ($f : E \to E$).

L'ensemble des permutations de E se note $\mathfrak{S}(E)$.

Propriété : Caract. de la bijectivité et récip. de la réciproque

Soit $f : E \to F$.

(i) f est bijective si et seulement s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
*Lorsqu'elle existe une telle application est unique ; on l'appelle **réciproque** de f et on la note f^{-1}.*
On a alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.

(ii) Si f est bijective,

$$\forall x \in E, \ \ \forall y \in F, \ \ \left[y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)\right]$$

(iii) Si $f : E \to F$ est bijective, $f^{-1} : F \to E$ l'est aussi et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Méthode : Montrer que f est bijective

On peut :
- Montrer que f est injective et surjective. La preuve de la surjectivité donne souvent l'expression de f^{-1}.
- Trouver g telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$, alors $g = f^{-1}$.
- Résoudre pour tout y l'équation $y = f(x)$ (on obtient $x = f^{-1}(y)$.)
- Si $E \subset \mathbb{R}$ et $F \subset \mathbb{R}$: appliquer le théorème de la bijection. Ne donne pas f^{-1} (mais donne sa continuité et sa monotonie).

Propriété : Composée de bijections

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ bijectives, alors $g \circ f$ bijective. Réciproque fausse.
On a alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Définition : Équipotence

Deux ensembles sont dits **équipotents** lorsqu'il existe une bijection allant de l'un vers l'autre.

Propriété : Image réciproque et image de la réciproque

Soit $f : E \to F$ bijective, $B \subset F$.

$$f^{(-1)}(B) = \left(f^{-1}\right)(B).$$

II Relations binaires

1 Généralités

Définition : Relation binaire

Soient E un ensemble. On appelle **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E toute relation vraie pour certains couples $(x, y) \in E^2$.

C'est-à-dire que l'on a un ensemble $\Gamma \subset E^2$ tel que x est en relation avec y, ce qui se note $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $(x, y) \in \Gamma$. Γ est le **graphe** de $\mathcal{R}$.

Définition : Réflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. $\mathcal{R}$ est dite :
- **réflexive** ssi $\forall x \in E, \ \ x\mathcal{R}x$.
- **symétrique** ssi $\forall x, y \in E, \ \ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- **antisymétrique** ssi $\forall x, y \in E, \ \ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.
- **transitive** ssi $\forall x, y, z \in E, \ \ x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

2 Relations d'équivalence

Définition : Relation d'équivalence

On appelle **relation d'équivalence** toute relation binaire réflexive, symétrique et transitive sur un ensemble non vide.

Définition : Congruences

(i) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo** n sur $\mathbb{Z}$ par

$$a \equiv b\ [n] \iff n \mid (a-b) \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad a = b + kn$$
$$\iff a \text{ et } b \text{ ont même reste de division par } n.$$

(ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On définit la relation de **congruence modulo** α sur $\mathbb{R}$ par

$$x \equiv y\ [\alpha] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\quad x = y + k\alpha$$

Propriété

Ces deux relations sont des relations d'équivalence.

Définition : Classes d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E et $x \in E$.

On appelle **classe d'équivalence** de x pour $\mathscr{R}$ l'ensemble

$$\overline{x} = \mathrm{cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathscr{R}y\}$$

que l'on note aussi $\dot{x}$, $\mathrm{cl}(x)$ ou $[x]$ ou $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)$ ou $[x]_{\mathscr{R}}$ s'il y a ambiguïté.

L'ensemble de toutes les classes d'équivalence pour $\mathscr{R}$ est **l'ensemble quotient** noté $E/_{\mathscr{R}}$. C'est une partie de $\mathscr{P}(E)$.

Si $X \in E/_{\mathscr{R}}$, on a $x \in E$ tel que $X = \mathrm{cl}(x)$. On dit que x est un **représentant** de X.

Propriété

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

(i) $\forall x, y \in E, \quad \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \iff x\mathscr{R}y$

(ii) $\forall x, y \in E, \quad \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \text{ ou } \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) = \varnothing.$

(iii) $\bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x) = E$

(iv) Les classes d'équivalence (donc $E/_{\mathscr{R}}$) forment une partition de E.

3 Relations d'ordre

a Définitions

Définition : Ordre

Une **relation d'ordre** (ou **ordre**) sur un ensemble E est une relation binaire $\trianglelefteq$ réflexive, antisymétrique et transitive.

Lorsqu'une telle relation $\trianglelefteq$ existe, on dit que $(E, \trianglelefteq)$ est un **ensemble ordonné**.

Définition : Ordre total, partiel

Une ordre $\trianglelefteq$ sur E est dit **total** lorsque

$$\forall x, y \in E,\quad x \trianglelefteq y \text{ ou } y \trianglelefteq x$$

$(E, \trianglelefteq)$ est alors **totalement ordonné**.

Sinon, c'est un ordre **partiel** et $(E, \trianglelefteq)$ est un **ensemble partiellement ordonné**, ce qui se traduit par

$$\exists x, y \in E,\quad x \not\trianglelefteq y \text{ et } y \not\trianglelefteq x$$

b Majorants et minorants

Définition : Majorants, minorants

Soit $(E, \trianglelefteq)$ ordonné, $x \in E$, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** dans E (ou **majore**) x lorsque $x \trianglelefteq M$.

On dit que $M \in E$ est un **majorant** (ou **majore**) A lorsqu'il majore tous ses éléments :

$$\forall a \in A,\quad a \trianglelefteq M$$

On dit que $m \in E$ est un **minorant** dans E (ou **minore**) x lorsque $m \trianglelefteq a$.

On dit que $m \in E$ est un **minorant** (ou **minore**) A lorsqu'il minjore tous ses éléments :

$$\forall a \in A,\quad m \trianglelefteq x$$

c Éléments extrémaux

Définition : Plus grand, plus petit élément

Soit $(E, \trianglelefteq)$ ordonné, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.

On appelle **plus grand élément** ou **maximum** de A, s'il existe, tout $\boxed{g \in A}$ tel que g majore A :

$$\forall a \in A,\quad a \trianglelefteq g$$

On appelle **plus petit élément** ou **minimum** de A, s'il existe, tout $\boxed{p \in A}$ tel que p minore A :

$$\forall a \in A,\quad p \trianglelefteq x$$

Propriété : Unicité

S'il y a un plus grand élément, il est unique et on le note $\max A$.

S'il y a un plus petit élément, il est unique et on le note $\min A$.

d Borne inférieure, borne supérieure

Définition : Borne inférieure, borne supérieure

Soit $(E, \trianglelefteq)$ ordonné, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.

Si l'ensemble des majorant de A dans E est non vide et admet un plus petit élément, on l'appelle **borne supérieure** de A dans E et on le note $\sup A$ ou $\sup_E A$.

Si l'ensemble des minorant de A dans E est non vide et admet un plus grand élément, on l'appelle **borne inférieure** de A dans E et on le note $\inf A$ ou $\inf_E A$.

Propriété

Soit $(E, \trianglelefteq)$ *ordonné,* $A \subset E$, $A \neq \varnothing$.

(i) $\sup A$ *existe et* $\sup A \in A \Rightarrow \max A$ *existe et vaut* $\sup A$.

(ii) $\max A$ *existe* $\Rightarrow \sup A$ *existe et vaut* $\max A$.

(idem avec $\inf$ *et* $\min$.*)*

e Cas particulier de $(\mathbb{R}, \leqslant)$

Théorème

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

Corollaire

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Propriété : Caractérisation du sup et de l'inf

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \alpha \quad \text{(}\alpha\text{ majore } A\text{)} \\ \forall M' \in \mathbb{R} \mid M' < \alpha, \quad \exists x \in A, \quad M' < x \\ \quad \text{(Pas de majorant plus petit)} \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad \beta \leqslant x \quad \text{(}\beta\text{ minore } A\text{)} \\ \forall m' \in \mathbb{R} \mid \beta < m', \quad \exists x \in A, \quad x < m' \\ \quad \text{(Pas de minorant plus grand)} \end{cases}$$

Propriété : Énoncé local

$$\alpha = \sup A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \alpha \quad \text{(}\alpha\text{ majore } A\text{)} \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad \alpha - \varepsilon < x \\ \quad \text{(Pas de majorant plus petit)} \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \quad \beta \leqslant x \quad \text{(}\beta\text{ minore } A\text{)} \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A, \quad x < \beta + \varepsilon \\ \quad \text{(Pas de minorant plus grand)} \end{cases}$$

Propriété : Caractérisation séquentielle

La borne supérieure de A *est le seul majorant limite d'une suite d'éléments de* A.

La borne inférieure de A *est le seul minorant limite d'une suite d'éléments de* A.