Chapitre X

Ensembles de nombres usuels

I $\mathbb{N}$: Les Entiers Naturels

Question : Comment formalise-t-on l'ensemble $\mathbb{N}$?

Réponse : Comme l'unique ensemble [1]

- admettant un élément noté 0,
- tel que tout entier n admet un unique successeur $(s(n) = n+1)$,
- aucun entier n'admet 0 comme successeur,
- deux entiers qui ont même successeur sont égaux (s est injective),
- si une partie A contient 0 et est stable par s, $A = \mathbb{N}$. (Principe de récurrence).

À partir de ces axiomes, on construit facilement les lois $+$ et $\times$ habituelles, ainsi que l'ordre total $\leqslant$.

On a la propriété remarquable suivante :

Propriété

*Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément : on dit que $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est **bien ordonné** (ou que $\leqslant$ est un **bon ordre** sur $\mathbb{N}$.)*

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Remarque

On peut démontrer que tout entier n a une unique écriture en base 10, c'est-à-dire de la forme

$$n = a_p a_{p-1} \cdots a_0 = a_p \cdot 10^p + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

avec $a_0, \ldots, a_p \in [\![0, 9]\!]$.

De la même manière, on a une écriture unique de toute entier dans n'importe quelle base $b \in \mathbb{N}^*$:

$$n = \overline{a_q a_{q-1} \cdots a_0}^b = a_q \cdot b^q + \cdots + a_1 \cdot b + a_0$$

avec $a_0, \ldots, a_q \in [\![0, b-1]\!]$.

Les chiffres a_0, ..., a_q s'obtiennent comme restes des divisions euclidiennes[2] successives par b.

1. Il s'agit des axiomes de Peano, définissant $\mathbb{N}$ de manière unique à bijection près.

Exemple

2022 en base 5, 2, 16.

II $\mathbb{Z}$: Les Entiers Relatifs

L'idée est, à partir de $\mathbb{N}$, de rajouter un symétrique pour la loi $+$ à chaque entier, pour définir $\mathbb{Z}$.

On étend alors la définition de $+$, $\times$ et $\leqslant$ à $\mathbb{Z}$.

Propriété

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

III $\mathbb{Q}$: Les Nombres Rationnels

Pour définir $\mathbb{Q}$, on utilise la relation d'équivalence

$$(p, q)\mathscr{R}(p', q') \iff pq' = p'q$$

sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dont les classes d'équivalences sont identifiées aux rationnels $\frac{p}{q}$.

La difficulté est alors de définir les lois $+$ et $\times$ et l'ordre $\leqslant$ indépendamment du choix d'un représentant $\frac{p}{q}$ d'une fraction rationnelle r.

On montrera dans le cours d'arithmétique la propriété :

Propriété

*Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, c'est-à-dire que p et q n'ont pas de diviseur non trivial en commun (la fraction est dite **irréductible**).*

IV $\mathbb{D}$: Les Nombres Décimaux

On définit l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux comme l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{n}{10^m}$, dont l'écriture décimal est finie.

2. voir cours d'arithmétique.

Un tel nombre a une écriture en base 10 de la forme :

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-p} \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \cdots + a_{-p} 10^{-p} \\ &= a_n 10^n + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \cdots + \frac{a_{-p}}{10^p} \end{aligned}$$

avec tous les $a_i \in [\![0,9]\!]$.

On peut montrer que cette écriture **finie** est unique.

Remarque

On peut montrer qu'une écriture infinie ne l'est pas nécessairement : par exemple $0{,}999\ldots = 1$.

On montrera dans le chapitre sur les séries que les seuls cas où il n'y a pas unicité sont ceux où l'écriture décimale se termine par une infinité de 9/une infinité de 0, c'est-à-dire pour les décimaux.

V $\mathbb{R}$: Les Nombres Réels

1 Généralités, nombres irrationnels

On ne donne pas de construction [1] de $\mathbb{R}$ ici (hors-programme). L'idée étant que les nombres rationnels laissent une infinité de « trous infinitésimaux » que l'on « bouche » pour obtenir les réels.

Les propriétés principales de $\mathbb{R}$ est qu'il est totalement ordonné par $\leqslant$ avec des lois $+$, $\times$ aux propriétés habituelles compatibles avec $\leqslant$, et qu'il vérifie les propriétés fondamentales :

Propriété

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Notons que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{D} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Les réels non rationnels sont les **irrationnels** (exemples : $\sqrt{2}$, π, e).

Propriété

(i) Une somme, une différence, un produit, un quotient de deux rationnels l'est toujours.

C'est moins simple pour les irrationnels !

(ii) $\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ x \pm r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

(iii) $\forall r \in \mathbb{Q},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ rx, \frac{1}{x}, \frac{r}{x} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ si $r \neq 0$.

(iv) Si $x, y \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, on ne peut rien dire en général de $x \pm y$, xy, $\frac{x}{y}$.

2 Partie entière

Lemme

$\mathbb{Z}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$ et toute partie non vide de $\mathbb{Z}$ majorée dans $\mathbb{R}$ l'est dans $\mathbb{Z}$ et donc admet un plus grand élément.

Remarque

C'est équivalent à une propriété de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est archimédien) : si $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$, on a $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$ (avec $x = 1$).

Propriété : Existence et unicité de la partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x < n+1$, c'est-à-dire $x-1 < n \leqslant x$.

Exemple

Nombre de chiffres dans l'écriture en base b

3 Approximations décimales

Exemple

$\pi = 3{,}141592\ldots$, donc

$$\begin{aligned} 3 &\leqslant \pi < 4 \\ 3{,}1 = \frac{31}{10} &\leqslant \pi < 3{,}2 = \frac{32}{10} \\ 3{,}14 = \frac{314}{100} &\leqslant \pi < 3{,}15 = \frac{315}{100} \\ &\ldots \end{aligned}$$

1. Il en existe plusieurs (coupures de Dedekind, suites de Cauchy) qui utilisent toutes les nombres rationnels.

1. On verra dans le cours d'arithmétique que les seules racines d'entiers rationnelles sont les racines de carrés d'entiers.

Définition : Approximations décimales

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les décimaux

$$d_n(x) =$$

et

$$D_n(x) =$$

$d_n(x)$ et $D_n(x)$ sont les **approximations décimales de x à 10^{-n} près par défaut et par excès** respectivement.

Remarque

$d_n(x)$ est un développement décimal limité de x : en ne gardant que n chiffres après la virgule. On peut montrer que ces chiffres sont uniques (ce sont les décimales de x).

Rappel : un développement illimité n'est pas toujours unique ! Les seuls cas où il n'y a pas unicité sont ceux où l'écriture décimale se termine par une infinité de 9/une infinité de 0, c'est-à-dire pour les décimaux.

Propriété

Si $x \in \mathbb{R}$, les suites $(d_n(x))_n$ et $(D_n(x))_n$ sont respectivement croissante et décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d_n(x) \leqslant x < D_n(x)$$

$$|d_n(x) - x| = x - d_n(x) \leqslant 10^{-n}$$

$$|D_n(x) - x| = D_n(x) - x \leqslant 10^{-n}$$

Remarque

On en déduit en particulier que $d_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^-$ et $D_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^+$.

4 Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Définition : Densité

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \varnothing$.

Propriété : Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Entre deux réels donnés, on peut toujours trouver un rationnel et un irrationnel.

5 Caractérisation des intervalles

Définition : Convexe

Une partie C de $\mathbb{R}$ est dite **convexe** lorsque

$$\forall x, y \in C \mid x < y, \quad [x, y] \subset C.$$

Propriété : Caractérisation des intervalles

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les convexes de $\mathbb{R}$.

6 Droite numérique achevée

Définition : Droite numérique achevée

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On étend alors les lois $+$ et $\times$ à $\overline{\mathbb{R}}$ sauf en cas d'incompatibilité ainsi que l'ordre total $\leqslant$:

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$$

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	?	0	0	0	?
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Remarques

R1 – Il y a quatre types d'intervalles dans $\overline{\mathbb{R}}$: si $\bar{a}, \bar{b} \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $\bar{a} \leqslant \bar{b}$, $[\bar{a}, \bar{b}]$, $]\bar{a}, \bar{b}]$, $[\bar{a}, \bar{b}[$, $]\bar{a}, \bar{b}[$.

R2 – Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ (éventuellement infinie).