

Chapitre X

Ensembles de nombres usuels

I \mathbb{N} : Les Entiers Naturels

Propriété

Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément : on dit que (\mathbb{N}, \leq) est **bien ordonné** (ou que \leq est un **bon ordre** sur \mathbb{N} .)

Toute partie non vide majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

II \mathbb{Z} : Les Entiers Relatifs

Propriété

Toute partie non vide minorée de \mathbb{Z} admet un plus petit élément.

Toute partie non vide majorée de \mathbb{Z} admet un plus grand élément.

III \mathbb{Q} : Les Nombres Rationnels

Propriété

Tout nombre rationnel s'écrit de manière unique $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, c'est-à-dire que p et q n'ont pas de diviseur non trivial en commun (la fraction est dite **irréductible**).

IV \mathbb{D} : Les Nombres Décimaux

Définition : Nombres décimaux

On définit l'ensemble \mathbb{D} des décimaux comme l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{n}{10^m}$, dont l'écriture décimale est finie.

Un tel nombre a une écriture en base 10 de la forme :

$$\begin{aligned} a_n a_{n-1} \cdots a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-p} \\ = a_n 10^n + \cdots + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + \cdots + a_{-p} 10^{-p} \\ = a_n 10^n + \cdots + a_0 + \frac{a_{-1}}{10} + \cdots + \frac{a_{-p}}{10^p} \end{aligned}$$

avec tous les $a_i \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

On peut montrer que cette écriture **finie** est unique.

V \mathbb{R} : Les Nombres Réels

1 Généralités, nombres irrationnels

Propriété

Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Propriété

(i) Une somme, une différence, un produit, un quotient de deux rationnels l'est toujours.

C'est moins simple pour les irrationnels !

(ii) $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x \pm r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(iii) $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, rx, \frac{1}{x}, \frac{r}{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si $r \neq 0$.

(iv) Si $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on ne peut rien dire en général de $x \pm y, xy, \frac{x}{y}$.

2 Partie entière

Lemme

\mathbb{Z} n'est pas majoré dans \mathbb{R} et toute partie non vide de \mathbb{Z} majorée dans \mathbb{R} l'est dans \mathbb{Z} et donc admet un plus grand élément.

Propriété : Existence et unicité de la partie entière

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$, c'est-à-dire $x-1 < n \leq x$.

3 Approximations décimales

Définition : Approximations décimales

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les décimaux

$$d_n(x) = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$$

et

$$D_n(x) = d_n(x) + \frac{1}{10^n} = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n} = \frac{\lfloor 10^n x + 1 \rfloor}{10^n}.$$

$d_n(x)$ et $D_n(x)$ sont les **approximations décimales de x à 10^{-n} près par défaut et par excès** respectivement.

Propriété

Si $x \in \mathbb{R}$, les suites $(d_n(x))_n$ et $(D_n(x))_n$ sont respectivement croissante et décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d_n(x) \leq x < D_n(x)$$

$$|d_n(x) - x| = x - d_n(x) \leq 10^{-n}$$

$$|D_n(x) - x| = D_n(x) - x \leq 10^{-n}$$

4 Densité de \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Définition : Densité

Une partie A de \mathbb{R} est dite **dense** dans \mathbb{R} lorsque pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, $A \cap]x, y[\neq \emptyset$.



Propriété : Densité de \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

\mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

Entre deux réels donnés, on peut toujours trouver un rationnel et un irrationnel.

5 Caractérisation des intervalles

Définition : Convexe

Une partie C de \mathbb{R} est dite **convexe** lorsque $\forall x, y \in C \mid x < y, [x, y] \subset C$.

Propriété : Caractérisation des intervalles

Les intervalles de \mathbb{R} sont les convexes de \mathbb{R} .

6 Droite numérique achevée

Définition : Droite numérique achevée

On appelle **droite numérique achevée** l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

On étend alors les lois $+$ et \times à $\overline{\mathbb{R}}$ sauf en cas d'incompatibilité ainsi que l'ordre total \leq :

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?$
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \leq x \leq +\infty$

\times	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$?$	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	$?$	0	0	0	$?$
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$?$	$+\infty$	$+\infty$