Suites

27 novembre 2017

Plan

I Definitions
1 Suites
2 Variations des suites réelles
II Des suites particulières
1 Suites arithmético-géométriques
2 Relation de récurrence linéaire d'ordre 2
III Limite d'une suite réelle
1 Suites convergentes
2 Limites infinies
3 Limites et ordre
4 Opérations sur les limites
5 Comparaison des suites usuelles
IV Les suites monotones
1 Théorème de la limite monotone
2 Suites adjacentes
V Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstraß
1 Définition
2 Propriétés

1. Suites

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Suites

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Suites

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. Suites

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u+v)_n = u_n + v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u \times v)_n = u_n \times v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$

1. Suites

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)_n = u_n + v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (u \times v)_n = u_n \times v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$

1. Suites

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de** $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $\mathbb{N}$, c'est-à-dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition : opérations $+$, $\times$ et $\cdot$

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u+v)_n = u_n + v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (u\times v)_n = u_n \times v_n$
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$

- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$

- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$
- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$
- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$

- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$

- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$

- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$

- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$
- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$
- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$

- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$

- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

- si et seulement si $|u| = (|u_n|)_n$ l'est
- si et seulement si $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant A$

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$

- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$

- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

- si et seulement si $|u| = (|u_n|)_n$ l'est
- si et seulement si $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant A$

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$
- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$
- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

- si et seulement si $|u| = (|u_n|)_n$ l'est
- si et seulement si $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant A$

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

2. Variations des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, m \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant m.$$
- **majorée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi
$$\exists\, M \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant M.$$
- **bornée** ssi $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée

- si et seulement si $|u| = (|u_n|)_n$ l'est
- si et seulement si $\exists\, A \in \mathbb{R},\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant A$

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} - u_n > 0.$
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} - u_n < 0.$
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_n = u_{n+1} (= u_0).$
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\;\; \forall\, n \geqslant n_0,\;\; u_n = u_{n+1} (= u_{n_0}).$

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0.$
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0.$
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0.$
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0).$
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0}).$

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- **décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n > 0$.
- **strcitement décroissante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} - u_n < 0$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_{n+1} (= u_0)$.
- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant n_0,\ \ u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Plan

1. Suites arithmético-géométriques

Définition :

On appelle

(i) **suite arithmétique** de raison $b \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + b$$

(ii) **suite géométrique** de raison $a \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n$$

(iii) **suite arithmético-géométrique** toute suite telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n + b$$

On dit que u est une **suite récurrente linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants**.

1. Suites arithmético-géométriques

Définition :

On appelle

(i) **suite arithmétique** de raison $b \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + b$$

(ii) **suite géométrique** de raison $a \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n$$

(iii) **suite arithmético-géométrique** toute suite telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n + b$$

On dit que u est une **suite récurrente linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants**.

1. Suites arithmético-géométriques

Définition :

On appelle

(i) **suite arithmétique** de raison $b \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + b$$

(ii) **suite géométrique** de raison $a \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n$$

(iii) **suite arithmético-géométrique** toute suite telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n + b$$

On dit que u est une **suite récurrente linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants**.

1. Suites arithmético-géométriques

Définition :

On appelle

(i) **suite arithmétique** de raison $b \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = u_n + b$$

(ii) **suite géométrique** de raison $a \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = a u_n$$

(iii) **suite arithmético-géométrique** toute suite telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; u_{n+1} = a u_n + b$$

On dit que u est une **suite récurrente linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants**.

1. Suites arithmético-géométriques

Définition :

On appelle

(i) **suite arithmétique** de raison $b \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + b$$

(ii) **suite géométrique** de raison $a \in \mathbb{K}$ toute suite vérifiant

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n$$

(iii) **suite arithmético-géométrique** toute suite telle qu'on ait $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n + b$$

On dit que u est une **suite récurrente linéaire d'ordre 1 à cœfficients constants**.

Propriété :

On a alors respectivement

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 a^n.$

(iii) Si $\tilde{u}$ est solution particulière, les solutions sont les $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de $(H)\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = av_n$, équation homogène associée.

Propriété :

On a alors respectivement

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = u_0 + nb$.

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \;\; u_n = u_0 a^n$.

(iii) Si $\tilde{u}$ est solution particulière, les solutions sont les $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de $(H) \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}, \;\; v_{n+1} = av_n$, équation homogène associée.

Propriété :

On a alors respectivement

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 + nb$.

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 a^n$.

(iii) Si $\tilde{u}$ est solution particulière, les solutions sont les $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de $(H)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = a v_n$, équation homogène associée.

Propriété :

On a alors respectivement

(i) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 + nb$.

(ii) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 a^n$.

(iii) Si $\tilde{u}$ est solution particulière, les solutions sont les $u = v + \tilde{u}$ où v est solution de $(H)\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ v_{n+1} = a v_n$, équation homogène associée.

2. Relation de récurrence linéaire d'ordre 2

Définition :

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à cœfficients constants** lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

L'**équation caractéristique** associée est $(E)\ r^2 = ar + b$.

2. Relation de récurrence linéaire d'ordre 2

Définition :

On dit qu'une suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une **suite récurrente linéaire d'ordre 2 homogène à cœfficients constants** lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

L'**équation caractéristique** associée est $(E)\ r^2 = ar + b$.

Propriété :

Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $a, b \in \mathbb{K}$, (E) $r^2 = ar + b$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- Soit (E) admet une unique solution (double) r dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (A + nB)r^n.$$

- Soit (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\rho^n$$

c'est-à-dire pour lesquelles on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = K\cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$

Propriété :

Si $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $a, b \in \mathbb{K}$, $(E)\ r^2 = ar + b$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

- Soit (E) admet une unique solution (double) r dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (A + nB)r^n.$$

- Soit (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\rho^n$$

c'est-à-dire pour lesquelles on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n = K\cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$

Propriété :

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ avec $a, b \in \mathbb{K}$, $(E)\ r^2 = ar + b$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

- Soit (E) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$
- Soit (E) admet une unique solution (double) r dans $\mathbb{K}$, alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{K}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (A + nB)r^n.$$
- Soit (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et (E) admet deux solutions complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Alors les solutions sont les suites pour lesquelles on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))\rho^n$$
c'est-à-dire pour lesquelles on a $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = K\cos(n\theta + \varphi)\rho^n.$$

Plan

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\;\; \forall\, n \geqslant N,\;\; |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\;\; \forall\, n \geqslant N,\;\; |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0.$

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

1. Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\;\; \forall\, n \geqslant N,\;\; |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall\, \varepsilon > 0,\;\; \exists\, N \in \mathbb{N},\;\; \forall\, n \geqslant N,\;\; |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \to \ell$.
Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

Propriété :

(i) $u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$.

(ii) Si $v_n \to 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\;\; |u_n - \ell| \leqslant v_n$ alors $u_n \to \ell$.

(iii) Si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

Propriété : Unicité de la limite

Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ est unique appelé **limite de** u.
On note alors (et seulement si la convergence est **démontrée**) $\ell = \lim u_n$.

Propriété : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Corollaire :

Une suite non bornée diverge.

Propriété : Unicité de la limite

Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ est unique appelé **limite de** u.
On note alors (et seulement si la convergence est **démontrée**)
$\ell = \lim u_n$.

Propriété : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Corollaire :

Une suite non bornée diverge.

Propriété : Unicité de la limite

Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ est unique appelé **limite de** u.
On note alors (et seulement si la convergence est **démontrée**)
$\ell = \lim u_n$.

Propriété : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Corollaire :

Une suite non bornée diverge.

Propriété : Unicité de la limite

Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ est unique appelé **limite de** u.
On note alors (et seulement si la convergence est **démontrée**) $\ell = \lim u_n$.

Propriété : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Corollaire :

Une suite non bornée diverge.

2. Limites infinies

Définition : Limite infinie

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A$$

ou de manière équivalente

$$\forall\, A \geqslant 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A$$

On note alors $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque

$$\forall\, B \in \mathbb{R},\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant B$$

ou de manière équivalente

$$\forall\, B \leqslant 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant B$$

On note alors $u_n \to -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

2. Limites infinies

Définition : Limite infinie

- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ lorsque

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A$$

  ou de manière équivalente

$$\forall\, A \geqslant 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \geqslant A$$

  On note alors $u_n \to +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$.
- On dit que $(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ lorsque

$$\forall\, B \in \mathbb{R},\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant B$$

  ou de manière équivalente

$$\forall\, B \leqslant 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ u_n \leqslant B$$

  On note alors $u_n \to -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

3. Limites et ordre

Propriété : Passage des inégalités à la limite

Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u \to \ell \in \mathbb{R}$ et $v \to \ell' \in \mathbb{R}$ et si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$. Si on suppose à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, **l'inégalité devient large à la limite** : $\ell \leqslant \ell'$.

Propriété :

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Corollaire :

Si $u_n \to \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $w \to -\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $w \to -\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
- $w \to -\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$

alors $u \to -\infty$.

Théorème : Limite par encadrement

(i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

- $v \to \ell$
- $w \to \ell$
- à partir d'un certain rang, $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$

alors $u \to \ell$.

(ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $v \to +\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$

alors $u \to +\infty$.

(iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

- $w \to -\infty$
- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant w_n$

alors $u \to -\infty$.

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \to \ell_1 + \ell_2$
- $uv \to \ell_1 \ell_2$

4. Opérations sur les limites

Propriété :

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \to \lambda \ell$.

(ii) Si $u \to 0$ et v bornée, alors $uv \to 0$.

(iii) Si $u \to +\infty$ et v minorée, $u + v \to +\infty$.

Propriété :

Si $u \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \to \ell_1 + \ell_2$
- $uv \to \ell_1 \ell_2$

Propriété :

- Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et
$$\frac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to +\infty$.
- Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \to -\infty$.

Propriété :

- Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et
$$\frac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.
- Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$.

Propriété :

- Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{1}{u_n} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to +\infty$.
- Si $u_n \to 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \to -\infty$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**

On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors $u_n \to 0$,
- Si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.
- Si $\ell = 1$, c'est le cas douteux : on ne peut rien conclure.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors $u_n \to 0$,
- Si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.
- Si $\ell = 1$, c'est le cas douteux : on ne peut rien conclure.

4. Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \to +\infty$.
- Si $q \leqslant -1$, (q^n) n'a pas de limite.
  Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs.**
On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors $u_n \to 0$,
- Si $\ell > 1$, alors $u_n \to +\infty$.
- Si $\ell = 1$, c'est le cas douteux : on ne peut rien conclure.

Propriété : Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta > 0$, $q > 1$.

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

où $u \ll v$ signifie $\frac{u}{v} \to 0$ et on dit alors que u est **négligeable** devant v.

Plan

1. Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire :

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$). De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

1. Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire :

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$). De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

1. Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire :

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$). De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

1. Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire :

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$).
De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

1. Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \to +\infty$ (respectivement $u \to -\infty$).

Corollaire :

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant \lim u$ (respectivement $u_n \geqslant \lim u$). De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

2. Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $v - u \to 0$.

Propriété :

Si u, v sont adjacentes avec u croissantes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \ell \leqslant v_n,$$

les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

Plan

1. Définition

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

φ est appelée **extractrice**.

1. Définition

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

φ est appelée **extractrice**.

1. Définition

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \;\; v_n = u_{\varphi(n)}.$$

φ est appelée **extractrice**.

1. Définition

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \;\; v_n = u_{\varphi(n)}.$$

φ est appelée **extractrice**.

2. Propriétés

Lemme :

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété :

(i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.

(ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u.

(iii) Si $u \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ.

(iv) Réciproquement, si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \to \ell$.

2. Propriétés

Lemme :

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété :

(i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.

(ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u.

(iii) Si $u \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ.

(iv) Réciproquement, si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \to \ell$.

2. Propriétés

Lemme :

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété :

(i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.

(ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u.

(iii) Si $u \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ.

(iv) Réciproquement, si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \to \ell$.

2. Propriétés

Lemme :

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété :

(i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.

(ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u.

(iii) Si $u \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ.

(iv) Réciproquement, si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \to \ell$.

2. Propriétés

Lemme :

Si φ est une extractrice, alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \varphi(n) \geqslant n$.

Propriété :

(i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.

(ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u.

(iii) Si $u \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ.

(iv) Réciproquement, si $u_{2n} \to \ell$ et $u_{2n+1} \to \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \to \ell$.

3. Théorème de Bolzano-Weierstraß

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

Plan

I Definitions
1 Suites
2 Variations des suites réelles
II Des suites particulières
1 Suites arithmético-géométriques
2 Relation de récurrence linéaire d'ordre 2
III Limite d'une suite réelle
1 Suites convergentes
2 Limites infinies
3 Limites et ordre
4 Opérations sur les limites
5 Comparaison des suites usuelles
IV Les suites monotones
1 Théorème de la limite monotone
2 Suites adjacentes
V Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstraß
1 Définition
2 Propriétés

1. Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Rappel :

Propriété :

Soit A partie non vide $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, x \in A, \ \ x \leqslant \alpha \\ \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \ \ a_n \to \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall\, x \in A, \ \ x \geqslant \beta \\ \exists\, (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \ \ a_n \to \beta \end{cases}$$

2. Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire :

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire :

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.

Corollaire :

(i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.

(ii) $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Plan

I Definitions
1 Suites
2 Variations des suites réelles
II Des suites particulières
1 Suites arithmético-géométriques
2 Relation de récurrence linéaire d'ordre 2
III Limite d'une suite réelle
1 Suites convergentes
2 Limites infinies
3 Limites et ordre
4 Opérations sur les limites
5 Comparaison des suites usuelles
IV Les suites monotones
1 Théorème de la limite monotone
2 Suites adjacentes
V Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstraß
1 Définition
2 Propriétés

Définition :

Soit $z=(z_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z)=(\mathfrak{Re}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z}=(\overline{z_n})\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z)=(\mathfrak{Im}(z_n))\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z|=(|z_n|)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n)\in\mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell\in\mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n-\ell|\to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \ \exists\,N\in\mathbb{N},\ \ \forall\,n\geqslant N,\ \ |z_n-\ell|\leqslant\varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n)\in\mathbb{C}^n$ et $\ell\in\mathbb{C}$.

(i) $z_n\to\ell\iff\mathfrak{Re}\,z_n\to\mathfrak{Re}\,\ell$ et $\mathfrak{Im}\,z_n\to\mathfrak{Im}\,\ell$

(ii) $z_n\to\ell\implies|z_n|\to|\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell\neq 0$, mais $z_n\to 0\iff|z_n|\to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \implies |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \Longrightarrow |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \implies |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geqslant N,\ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \implies |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \Longrightarrow |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \implies |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n \geqslant N, \quad |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \Longrightarrow |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geqslant N, \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \iff \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \implies |z_n| \to |\ell|$.

La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \iff |z_n| \to 0$.

Définition :

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\mathfrak{Re}(z) = (\mathfrak{Re}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\mathfrak{Im}(z) = (\mathfrak{Im}(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\overline{z} = (\overline{z_n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \to 0$, c'est-à-dire

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geqslant N,\ \ |z_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété :

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

(i) $z_n \to \ell \Longleftrightarrow \mathfrak{Re}\, z_n \to \mathfrak{Re}\, \ell$ et $\mathfrak{Im}\, z_n \to \mathfrak{Im}\, \ell$

(ii) $z_n \to \ell \Longrightarrow |z_n| \to |\ell|$.
La réciproque est fausse pour $\ell \neq 0$, mais $z_n \to 0 \Longleftrightarrow |z_n| \to 0$.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Rappel :

Définition :

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \ |z_n| \leqslant M$.

Propriété :

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \to 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \to 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.

Plan

1. Cas général

Propriété :

Si $u_n \to \ell \in D$ et si f est continue en ℓ, alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

Plan d'étude

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** f : I tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \in I$.
  Vu la proriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !

Plan d'étude

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.
- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par** f : I tel que $f(I) \subset I$.
  Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall\, n \geqslant n_0, \;\; u_n \in I$.
  Vu la proriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f. (Il faut donc chercher les points fixes !)
  On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g.
  Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie !

- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$
  - Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geqslant f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$
  - Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}.)$$
  - Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f.
  - La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g.
  - Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est **monotone**.
    (Si $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \leqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}$$
    et si $u_{n_0} \geqslant u_{n_0+1}$, ie $g\left(u_{n_0}\right) \leqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$u_n = f^{n-n_0}\left(u_{n_0}\right) \geqslant f^{n-n_0}\left(u_{n_0+1}\right) = u_{n+1}.)$$
  - Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $\left(u_{2n}\right)_{n \geqslant \frac{n_0}{2}}$ et $\left(u_{2n+1}\right)_{n \geqslant \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.
    Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fausse en général.)

2. Cas d'une fonction contractante

Définition :

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a, b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que
$\forall\, x, x' \in [a, b], \ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\, |x - x'|$.

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in]a, b[, \ \ |f'(t)| \leqslant k$.

Alors $\forall\, x, x' \in [a, b], \ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\, |x - x'|$.

2. Cas d'une fonction contractante

Définition :

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a, b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que
$\forall\, x, x' \in [a, b], \;\; |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in]a, b[, \;\; |f'(t)| \leqslant k$.

Alors $\forall\, x, x' \in [a, b], \;\; |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

2. Cas d'une fonction contractante

Définition :

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a, b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que
$\forall\, x, x' \in [a, b],\;\; |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in]a, b[,\;\; |f'(t)| \leqslant k$.

Alors $\forall\, x, x' \in [a, b],\;\; |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

2. Cas d'une fonction contractante

Définition :

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a, b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que
$\forall\, x, x' \in [a, b],\ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in]a, b[,\ \ |f'(t)| \leqslant k$.

Alors $\forall\, x, x' \in [a, b],\ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

2. Cas d'une fonction contractante

Définition :

Une fonction f est dite contractante sur un segment $[a, b]$ si et seulement si on a $k < 1$ tel que
$\forall\, x, x' \in [a, b],\ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

Théorème :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que

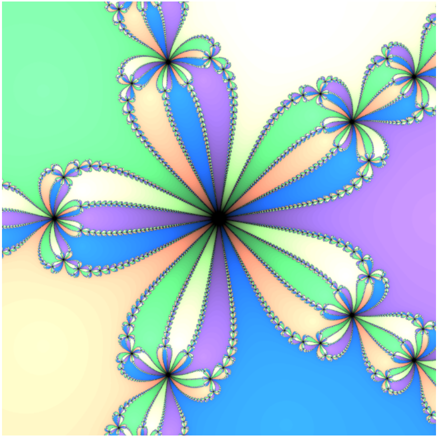
- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall\, x \in]a, b[,\ \ |f'(t)| \leqslant k$.

Alors $\forall\, x, x' \in [a, b],\ \ |f(x) - f(x')| \leqslant k\,|x - x'|$.

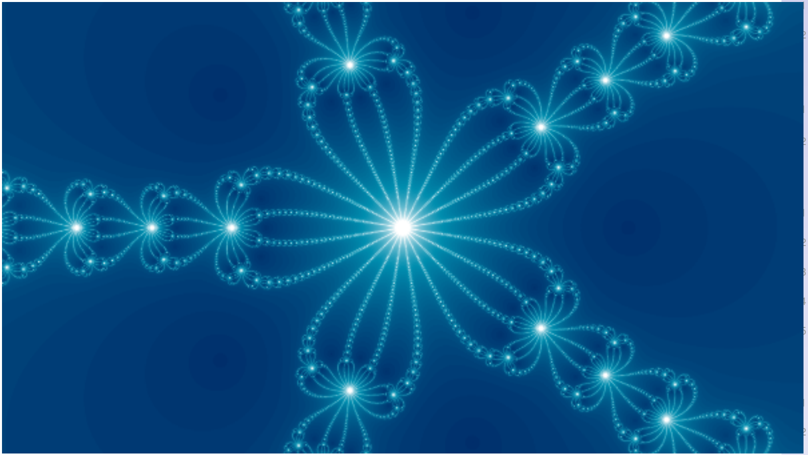
Fractal de Newton

On itère une suite qui doit converger vers l'une des racines de $X^5 - 1$ et on colore le point suivant cette racine (dégradé pour la vitesse de convergence.) Cela met en évidence la notion de **bassin d'attraction**. Pour f dérivable, il s'agit de considérer

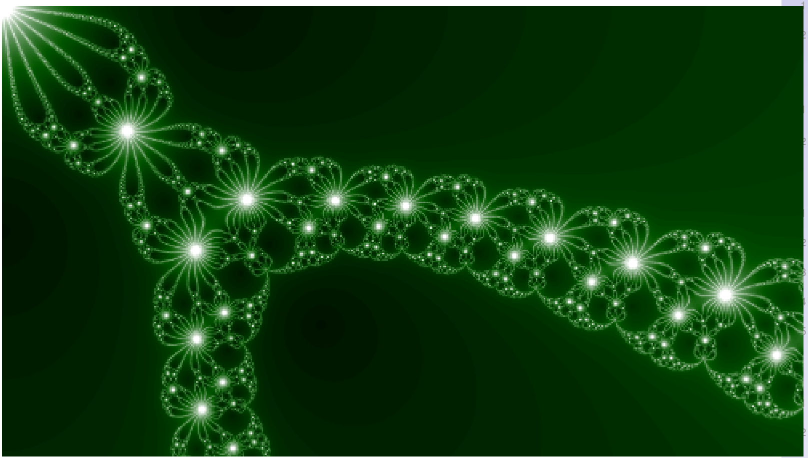
$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$



Version monochrome :



Avec $P(X) = X^8 + 15X^4 - 16$:



Lapin de Douady avec $P(X) = (X-1)\left(X - a + \frac{1}{2}\right)\left(X + a + \frac{1}{2}\right)$ où $a = -0{,}00508 + 0{,}33136\mathrm{i}$: