

1 Définitions

1 Suites

\mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition : suite

On appelle **suite d'éléments de \mathbb{K}** toute famille d'éléments de \mathbb{K} indexée par \mathbb{N} , c'est-à-dire toute application de \mathbb{N} dans \mathbb{K} .

L'ensemble des suites d'éléments de \mathbb{K} est notée $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Une suite d'éléments de \mathbb{K} est notée $\left. \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \\ n \mapsto u_n \end{array} \right\}$

ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(u_n)_n$ ou (u_n) **MAIS PAS u_n !!!**

Une suite d'éléments de \mathbb{K} définie à partir d'un certain rang (apcr) $n_0 \in \mathbb{N}$ est une application de $\llbracket n_0, +\infty \llbracket$ dans \mathbb{K} , notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Définition : opérations $+$, \times et \cdot

Sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ on définit des lois $+$, \times et \cdot par, si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\forall n \in \mathbb{N}, (u + v)_n = u_n + v_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (u \times v)_n = u_n \times v_n$
- $\forall n \in \mathbb{N}, (\lambda u)_n = \lambda u_n$

Les propriétés de ces lois sont les propriétés habituelles (pour $+$ et \times : associativité, commutativité, éléments neutres, etc.)

⚠ $u \times v = 0 = (0)_{n \in \mathbb{N}} \not\Rightarrow u = 0$ ou $v = 0$!

On dit que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ n'est pas **intègre**.

2 Variation des suites réelles

Définition : Majoration et minoration de suites

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite

- **minorée** ssi $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m.$$

- **majorée** ssi $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est ssi

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M.$$

- **bornée** ssi $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ l'est ssi $n \mapsto u_n$ l'est elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété : Caractérisation des suites bornées

$u = (u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|u| = (|u_n|)_n$ l'est si et seulement si

$$\exists A \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq A.$$

Définition : Suites complexes bornées

$(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si et seulement si $(|u_n|)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'est.

Définition : Monotonie des suites

Soit u une suite à termes **réels**. u est dite

- **croissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- **décroissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$.
- **monotone** ssi elle est croissante ou décroissante.
- **strictement croissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- **strictement décroissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
- **strictement monotone** ssi elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **constante** ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1} (= u_0)$.

- **stationnaire** ssi elle est constante à partir d'un certain rang ie $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1} (= u_{n_0})$.

Propriété : Caractère borné d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Corollaire

Une suite non bornée diverge.

Propriété

Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors

- Si $\ell > a$, à partir d'un certain rang $u_n > a$.
- Si $\ell < a$, à partir d'un certain rang $u_n < a$.

Corollaire

Si $u_n \rightarrow \ell > 0$, alors à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

Théorème : Limite par encadrement

- (i) Si $u, v, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que
 - $v \rightarrow \ell$
 - $w \rightarrow \ell$
 - à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$
 alors $u \rightarrow \ell$.
- (ii) Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
 - $v \rightarrow +\infty$
 - à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$
 alors $u \rightarrow +\infty$.
- (iii) Si $u, w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que
 - $w \rightarrow -\infty$
 - à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n$
 alors $u \rightarrow -\infty$.

2 Opérations sur les limites

Propriété

- Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- (i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n \rightarrow \lambda \ell$.
 - (ii) Si $u \rightarrow 0$ et v bornée, alors $uv \rightarrow 0$.
 - (iii) Si $u \rightarrow +\infty$ et v minorée, $u + v \rightarrow +\infty$.

II Limite d'une suite réelle

1 Suites convergentes

Définition : Suite convergente

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 On dit que $(u_n)_n$ **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

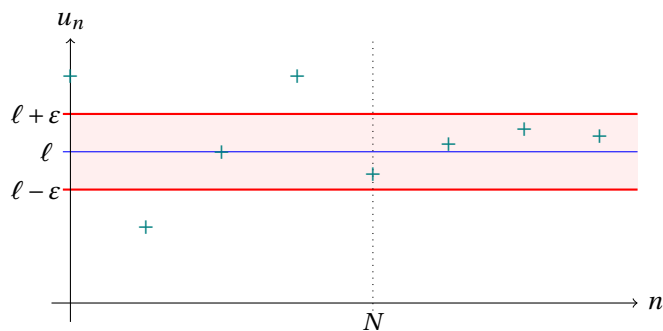
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

ce qui est strictement équivalent à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $u_n \rightarrow \ell$.
 Lorsqu'un tel ℓ existe, la suite (u_n) est dite **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.

À partir d'un certain rang, tous les termes de la suites sont dans le segment $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, et c'est valable pour ε aussi petit que l'on veut.



Propriétés

- (i) $u_n \rightarrow \ell \iff u_n - \ell \rightarrow 0 \iff |u_n - \ell| \rightarrow 0$.
- (ii) Si $v_n \rightarrow 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq v_n$ alors $u_n \rightarrow \ell$.
- (iii) Si $u_n \rightarrow \ell$, alors $|u_n| \rightarrow |\ell|$.

Propriété : Unicité de la limite

Si u converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, ℓ est unique appelé **limite de u** .
 On note alors (et seulement si la convergence est **démontrée**) $\ell = \lim u_n$.

Propriété

Si $u \rightarrow \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v \rightarrow \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors lorsque ces opérations sont bien définies,

- $u + v \rightarrow \ell_1 + \ell_2$
- $uv \rightarrow \ell_1 \ell_2$

Propriété

- Si $u_n \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}^*$, alors à partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \text{ finie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n > 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang $u_n < 0$, alors $\frac{1}{u_n} \rightarrow -\infty$.

III Les suites monotones

1 Théorème de la limite monotone

Théorème : Théorème de la limite monotone

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante (respectivement décroissante).

(i) Si u est majorée (respectivement minorée) alors u converge vers $\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (respectivement $\inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).

(ii) Si u n'est pas majorée (resp. minorée), alors $u \rightarrow +\infty$ (respectivement $u \rightarrow -\infty$).

Corollaire

Si u est une suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée), alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \lim u$ (respectivement $u_n \geq \lim u$).
De plus, les inégalités sont strictes en cas de stricte monotonie.

2 Suites adjacentes

Définition : Suites adjacentes

Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. u et v sont adjacentes si

- L'une est croissante, l'autre est décroissante,
- $v - u \rightarrow 0$.

Propriété

Si u, v sont adjacentes avec u croissante, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ell \leq v_n$, les inégalités étant strictes si u et v ont strictement monotones.

IV Relations de comparaison

1 Définition

Définition

Si $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et si v_n n'est jamais nul à partir d'un certain rang, on dit que

- u est **dominée** par v et on note $u = o(v)$ lorsque $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est bornée.
- u est **négligeable** devant v et on note $u = o(v)$ ou $u_n \ll v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 0$.
- u est **équivalente** à v et on note $u \sim v$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$, soit encore $u - v = o(v)$, c'est-à-dire $u = v + o(v)$.

2 Comparaison des suites usuelles

Propriété : Convergence des suites géométriques

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q = 1, q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1, q^n \rightarrow 0$.
- Si $q > 1, q^n \rightarrow +\infty$.
- Si $q \leq -1, (q^n)$ n'a pas de limite. Si $q < -1$, la suite n'est ni majorée, ni minorée.

Propriété : Critère de d'Alembert (HP)

Soit u une suite réelle **à termes strictement positifs**. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $\ell < 1$, alors $u_n \rightarrow 0$,
- Si $\ell > 1$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $\ell = 1$, c'est le cas douteux : on ne peut rien conclure.

Propriété : Croissances comparées

Soient $\alpha, \beta > 0, q > 1$.

$$\ln^\beta n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n! \ll n^n$$

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll \frac{1}{q^n} \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{\ln^\beta n}$$

Propriété

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable en $a \in I, f'(a) \neq 0$ et $h_n \rightarrow 0$ alors

$$f(a + h_n) - f(a) \sim f'(a)h_n.$$

Propriété : Équivalents usuels

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé et (h_n) telle que $h_n \rightarrow 0$.

• $\sin h_n \sim h_n$	• $(1+h_n)^\alpha - 1 \sim \alpha h_n$
• $\tan h_n \sim h_n$	• $\text{Arctan } h_n \sim h_n$
• $\cos h_n - 1 \sim -\frac{h_n^2}{2}$	• $\text{Arcsin } h_n \sim h_n$
• $\ln(1+h_n) \sim h_n$	• $\text{sh } h_n \sim h_n$
• $e^{h_n} - 1 \sim h_n$	• $\text{th } h_n \sim h_n$

Si $f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_q x^q$ avec $p \leq q, a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0, h_n \rightarrow 0$ et $x_n \rightarrow \pm\infty$, alors

$$f(h_n) \sim a_p h_n^p \quad \text{et} \quad f(x_n) \sim a_q x_n^q.$$

3 Propriétés

Propriété : Propriétés de o et O

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, v, w, b$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\alpha \neq 0, u = o(\alpha v) \implies u = o(v)$ et $u = O(\alpha v) \implies u = O(v)$.

(ii) $u = o(1) \iff u \rightarrow 0$ et $u = O(1) \iff u$ bornée.

(iii) Si $u = o(v)$ ou $u \sim v$, alors $u = O(v)$ et la réciproque est fautive.

(iv) **Transitivité**

$$u = o(v) \text{ et } v = o(w) \implies u = o(w)$$

$$u = O(v) \text{ et } v = O(w) \implies u = O(w)$$

(v) **Combinaison linéaire**

$$u = o(w) \text{ et } v = o(w) \implies \alpha u + \beta v = o(w)$$

$$u = O(w) \text{ et } v = O(w) \implies \alpha u + \beta v = O(w)$$

(vi) **Produit**

$$u = o(v) \text{ et } a = o(b) \implies ua = o(vb)$$

$$u = O(v) \text{ et } a = O(b) \implies ua = O(vb)$$

Propriété : Propriétés de ~

Soient $u, v, w, a, b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, v, w, b$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

(i) \sim est une relation d'équivalence.

(ii) Si $u \sim v$ et $v \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}} \cup \mathbb{C}$, alors $u \rightarrow \ell$.

(iii) $u \rightarrow \ell \neq 0 \iff u \sim \ell$.

(iv) Si $u \sim v$, alors à partir d'un certain rang, u_n et v_n sont de même signe.

(v) Si $u \sim v$ et $a \sim b$, alors $ua \sim vb$ et $\frac{u}{a} \sim \frac{v}{b}$.

(vi) Si $u \sim v$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixé**, ($u_n > 0$ et $v_n > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$, non nuls si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$), $u^\alpha \sim v^\alpha$.

(vii) Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $w_n \sim u_n$, alors $v_n \sim u_n$.

La propriété suivante n'est pas officiellement au programme mais à savoir retrouver :

- $e^{u_n} \sim e^{v_n} \iff u_n - v_n \rightarrow 0$
- Si $u_n \sim v_n$ avec pour tout $n, u_n > 0$ et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang $v_n \neq 1$ et si $v_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\ell \neq 1$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

En effet,

- $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n}$
- $\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln v_n} \rightarrow 1$ car $\ln\left(1 + \frac{u_n}{v_n}\right) \rightarrow 0$ et $\ln v_n \rightarrow \ln \ell \neq 0$ ou $\pm\infty$.

Propriété : Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

V Suites extraites, théorème de Bolzano-Weierstraß

1 Définition

Définition : Suite extraite

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de u toute suite $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.
 φ est appelée **extractrice**.

2 Propriétés

Lemme

Si φ est une extractrice, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.

Propriété

- (i) Toute suite extraite d'une suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante, majorée, minorée, bornée, constante, stationnaire l'est encore.
- (ii) Toute suite d'une suite extraite d'une suite u est une suite extraite de u .
- (iii) Si $u \rightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite de u tend vers ℓ .
- (iv) Réciproquement, si $u_{2n} \rightarrow \ell$ et $u_{2n+1} \rightarrow \ell$ avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u \rightarrow \ell$.
- (v) Si $u_n \sim v_n$ et φ extractrice, $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$.

3 Théorème de Bolzano-Weierstraß

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

VI Critères séquentiels

1 Caractérisation séquentielle des bornes inférieure et supérieure

Rappel :

Propriété

Soit A partie non vide $\mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \alpha \end{cases}$$

$$\beta = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq \beta \\ \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow \beta \end{cases}$$

2 Caractérisation séquentielle de la densité

Propriété

Soit A une partie de \mathbb{R} . A est dense dans \mathbb{R} si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A .

Corollaire

- (i) Tout réel est limite d'une suite de rationnels et d'une suite d'irrationnels.
- (ii) \mathbb{D} est dense dans \mathbb{R} .

VII Extension aux suites complexes

Notation

Soit $z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note

- $\Re(z) = (\Re(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\Im(z) = (\Im(z_n)) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
- $\bar{z} = (\bar{z}_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$
- $|z| = (|z_n|) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite convergente vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si $|z_n - \ell| \rightarrow 0$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$



Propriété

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$(i) \quad z_n \rightarrow \ell \iff \Re z_n \rightarrow \Re \ell \text{ et } \Im z_n \rightarrow \Im \ell$$

$$(ii) \quad z_n \rightarrow \ell \implies |z_n| \rightarrow |\ell|.$$

La réciproque est fautive pour $\ell \neq 0$, mais
 $z_n \rightarrow 0 \iff |z_n| \rightarrow 0$.

Rappel :

Définition

Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq M$.

Propriété

Toute suite complexe convergente est bornée

Propriété : Suites géométriques complexes

Soit $q \in \mathbb{C}$.

- Si $q = 1$, $q^n \rightarrow 1$.
- Si $|q| < 1$, $q^n \rightarrow 0$.
- Si $|q| > 1$, (q^n) n'est pas bornée et donc diverge.
- Si $|q| = 1$ et $q \neq 1$, (q^n) diverge en étant bornée.

Théorème : Théorème de Bolzano-Weierstraß

De toute suite complexe bornée on peut extraire une suite convergente.



Méthode : Étude d'une suite récurrente

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- On commence en général par faire un dessin, et par voir quelles propriétés vérifient directement la suite.

- Ensuite, les premières choses à cibler sont les **intervalles stables par f** : I tel que $f(I) \subset I$. Alors, par récurrence, si à partir d'un certain rang $u_{n_0} \in I$, la suite est bien définie et $\forall n \geq n_0, u_n \in I$.

Vu la propriété précédente, bien souvent, l'une des bornes de l'intervalle sera un point fixe de f . (Il faut donc chercher les points fixes!)

On pose en général $g(x) = f(x) - x$: les points fixes de f sont les zéros de g .

Il faut aussi s'assurer que la suite est bien définie!

- Ensuite, on s'intéresse à la monotonie de f .
 - ★ La monotonie de la suite peut se trouver directement en remarquant que $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$: il est donc primordial de connaître le signe de g .
 - ★ Si f est **croissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_n)_{n \geq n_0}$ est **monotone**.
(Si $u_{n_0} \leq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \leq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}$$

et si $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$, ie $g(u_{n_0}) \leq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = f^{n-n_0}(u_{n_0}) \geq f^{n-n_0}(u_{n_0+1}) = u_{n+1}.)$$

- ★ Si f est **décroissante** sur I stable par f et $u_{n_0} \in I$, alors $(u_{2n})_{n \geq \frac{n_0}{2}}$ et $(u_{2n+1})_{n \geq \frac{n_0-1}{2}}$ sont **monotones**, de monotonie contraire. Elles sont en fait solution de $v_{n+1} = f \circ f(v_n)$ avec $f \circ f$ croissante.

Lorsqu'elles convergent vers une même limite (c'est-à-dire qu'elles sont adjacentes), alors (u_n) converge vers cette limite. Notons que les points fixes de f sont des points fixes de $f \circ f$ (mais la réciproque est fautive en général.)

VIII Suites récurrentes

1 Cas général

Le but est d'étudier les suites récurrentes réelles d'ordre 1 générales :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

avec $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Propriété

Si $u_n \rightarrow \ell \in D$ et si f est continue en ℓ , alors $f(\ell) = \ell$ (ℓ est un point fixe de f).

2 Cas d'une fonction contractante

Définition

Une fonction f est dite **contractante** sur un intervalle I si et seulement si on a $k < 1$ tel que $\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

Cela se traduit graphiquement par le fait que les pentes des cordes ne sont « pas trop élevées ».



Méthode : Cas d'une fonction contractante

Cela est intéressant si I est stable par f . Si c'est le cas, si $\alpha \in I$ est un point fixe de f (on peut montrer qu'il est nécessairement unique), si $u_0 \in [a, b]$ stable par f , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$ et

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| &= |f(u_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k |u_{n-1} - \alpha| \\ &\vdots \quad (\text{récurrence}) \\ &\leq k^n |u_0 - \alpha| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Donc directement $u_n \rightarrow \alpha$, on a même une convergence exponentielle.

On peut parfois conclure rapidement grâce à l'inégalité des accroissements finis :

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec I intervalle. On suppose que

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ (bornes non comprises)
- On a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $|f'(x)| \leq k$.

Alors $\forall x, x' \in [a, b]$, $|f(x) - f(x')| \leq k |x - x'|$.