Programme de colle – MP2I

Relations

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Relations	
Relation binaire sur un ensemble.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent. Congruences dans $\mathbb{R}$, dans $\mathbb{Z}$. Notation $a \equiv b\ [c]$.
Relation d'ordre. Ordre partiel, total.	

Ensembles de nombres

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	Les constructions des ensembles de nombres usuels (et en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme.
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
~~Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.~~	
~~Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.~~	
b) Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$.	Notations $\sup X$, $\inf X$.
Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).	
~~Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.~~	

Pas d'exercice d'arithmétique concernant les congruences, c'est simplement un exemple de relation d'équivalence pour le moment.

Les notions de minorant, majorant, minimum, maximum, bornes inférieure et supérieure ont été définies dans le cadre général. Propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

La caractérisation séquentielle de la borne supérieure a été énoncée.

Semaine prochaine : Suites.

Questions de cours :

(i) Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

(ii) Énoncé des relations :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \operatorname{sgn}(x)\frac{\pi}{2}$$

et preuve de l'une d'entre elles (étude de fonction ou trigonométrie, savoir faire les deux).

(iii) Propriétés des classes d'équivalences. En particulier, elles forment une partition.

(iv) Définitions relatives aux ordres : relation d'ordre (total, partiel), majorant/maximum/borne supérieure, illustrations dans $(\mathbb{R}, \leqslant)$, $(\mathbb{N}, |)$, $(\mathscr{P}(E), \subset)$.

(v) Il n'existe pas d'ordre total sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations $+$ et $\times$.

(vi) Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

(vii) Caractérisation de la borne supérieure (énoncé global puis local avec ε), caractérisation séquentielle de la borne supérieure (sans preuve).

(viii) $\mathbb{Z}$ n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$ donc toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide majorée dans $\mathbb{R}$ l'est dans $\mathbb{Z}$. Existence et unicité de la partie entière.