

Programme de colle – MP21

Suites

Extrait du programme officiel :

Dans l'étude des suites, on distingue nettement les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).

Contenus	Capacités & commentaires
c) Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone. Mode de définition d'une suite réelle : explicite, implicite, par récurrence.	Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
d) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $u_n \rightarrow \ell$, $\lim u_n$.
Suite convergente, divergente. Toute suite convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient. Passage à la limite d'une inégalité large. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. Existence d'une limite par encadrement (limite finie), par minoration (limite $+\infty$), par majoration (limite $-\infty$).	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle. Utilisation d'une majoration de la forme $ u_n - \ell \leq v_n$, où (v_n) converge vers 0.

e) Suites monotones

Théorème de la limite monotone.
Théorème des suites adjacentes.

i) Suites particulières

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques.

Pour une relation de récurrence $u_{n+1} = a u_n + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$, recherche d'une solution constante, détermination des solutions.

Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Les suites extraites et les caractérisations séquentielles seront au programme la semaine prochaine.

Analyse asymptotique

Remarque : la description est adaptée de l'ancien programme, le nouveau prenant a priori comme point de départ les relations de comparaison des fonctions, mais le contenu est semblable.

L'objectif de cette section est d'introduire les techniques asymptotiques fondamentales, dans le cadre discret. Les suites y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant. On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.

Contenus	Capacités & commentaires
Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence. Lien entre ces relations. On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ sous l'hypothèse que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Pour la relation $u_n \sim v_n$, on donne les deux formes $\frac{u_n}{v_n} \rightarrow 1$ et $u_n = v_n + o(v_n)$, en insistant sur l'intérêt de la seconde dans les calculs. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^{\beta}(n)$, n^{α} , $e^{\gamma n}$. Règles usuelles de manipulation des équivalents et des symboles o et O . Obtention d'un équivalent par encadrement : si les suites réelles u , v , w vérifient $u \leq v \leq w$ et si $u_n \sim w_n$, alors $v_n \sim u_n$. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite. Formule de Stirling.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. La démonstration n'est pas exigible.
Catalogue des équivalents usuels (pour $h_n \rightarrow 0$), Formule de Stirling admise pour le moment. Semaine prochaine : Suites (fin). Structure de groupe.	

Questions de cours :

- (i) Intégrales de Wallis (relation d'équivalence, détermination d'un équivalent).
- (ii) Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constant : énoncé complet et démonstration pour un des trois cas (choisi par le colleur).
- (iii) Unicité de la limite. Théorème de convergence par encadrement.
- (iv) Limite d'un produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0. Limite d'une somme et d'un produit de suites convergentes.
- (v) Critère de d'Alembert, application à la comparaison des suites usuelles.
- (vi) Théorème de la limite monotone pour une suite croissante.
- (vii) Définition et convergence des suites adjacentes.
- (viii) Énoncé des équivalents usuels au voisinage de 0 ($\sin h_n$, $\tan h_n$, $\cos h_n - 1$, $\ln(1 + h_n)$, $e^{h_n} - 1$, $(1 + h_n)^{\alpha} - 1$, $\text{Arctan } h_n$, $\text{Arcsin } h_n$, $\text{sh } h_n$, $\text{th } h_n$). Quelques démonstrations (via taux d'accroissement), dont celle pour le \cos (via trigonométrie).