Devoir Libre n° 6

Exercice 1 – Complexes

1. On a

$$\frac{1+\mathrm{i}}{-3+3\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{6e^{\frac{2i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{6}e^{-\frac{5i\pi}{12}}=\left(\sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{6}}e^{-i\frac{5\pi}{96}}\right)^8.$$

On note alors $z_0=\sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{6}}e^{-i\frac{5\pi}{96}}$. On a alors

$$\begin{aligned}z^8=\frac{1+\mathrm{i}}{-3+3\sqrt{3}i}&\Leftrightarrow z^8=z_0^8\Leftrightarrow\left(\frac{z}{z_0}\right)^8=1 \text{ car } z_0\neq 0\\&\Leftrightarrow\exists\, k\in[\![0,8-1]\!],\ \frac{z}{z_0}=e^{\frac{2ik\pi}{8}}\\&\Leftrightarrow\exists\, k\in[\![0,7]\!],\ z=z_0e^{\frac{ik\pi}{4}}\\&\Leftrightarrow\exists\, k\in[\![0,7]\!],\ z=\sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{6}}e^{i\left(-\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$

Les racines 8èmes de $\frac{1+\mathrm{i}}{-3+3\sqrt{3}i}$ sont donc les $\sqrt[8]{\frac{\sqrt{2}}{6}}e^{i\frac{(24k-5)\pi}{96}}$ pour $k\in[\![0,7]\!]$.

2. Le discriminant de l'équation est $\Delta=(1+4\mathrm{i})^2-20(1+\mathrm{i})=-35-12\mathrm{i}$.
On cherche une racine δ de Δ sous forme algébrique $x+\mathrm{i}y$.
Dire que $\delta^2=\Delta$, c'est dire que

$$\begin{cases}x^2-y^2&=&-35\\2xy&=&-12\\x^2+y^2&=&|\Delta|=37\end{cases}$$

ie

$$\begin{cases}x^2&=&\frac{-35+37}{2}=1\\y^2&=&\frac{37+35}{2}=36\\xy&<&0\end{cases}$$

On peut donc choisir $\delta=1-6\mathrm{i}$.
On obtient alors les racines du trinômes :

$$z_1=\frac{-(1+4\mathrm{i})+1-6\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}\text{ et }z_2=\frac{-(1+4\mathrm{i})-1+6\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}.$$

Or

$$z_1=\frac{-5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{-5\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{|1+\mathrm{i}|^2}=-\frac{5}{2}(1+\mathrm{i}).$$

De même,

$$z_2=\frac{-1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{|1+\mathrm{i}|^2}=\frac{2\mathrm{i}}{2}=\mathrm{i}$$

(racine évidente ?)

Les solutions sont les fonctions $x\mapsto A\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+B\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}(1+\mathrm{i})x}$ pour $A,B\in\mathbb{C}$.

3. Les racines de l'équation caractéristique (E) $r^2+(1-\mathrm{i})r-\mathrm{i}=0$ sont évidentes : il s'agit de -1 et i. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $x\mapsto A\mathrm{e}^{-x}+B\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ avec $A,B\in\mathbb{C}$.
Comme i est racine simple de (E), on cherche une solution de la forme $f_0:x\mapsto Cx\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. En réinjectant dans l'équation différentielle, on trouve $C=\frac{1-\mathrm{i}}{2}$.

Les solutions sont donc les $x\mapsto A\mathrm{e}^{-x}+\left(B+\frac{1-\mathrm{i}}{2}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ pour $A,B\in\mathbb{C}$.

Exercice 2 – Équation différentielle d'ordre 1

1.

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
  $x\mapsto 1-x^2$ est continue et ne s'annule pas sur $I_1=]-\infty,-1[$, $I_2=]-1,1[$ et $I_3=]1,+\infty[$.
  $x\mapsto x$ et $x\mapsto -1$ sont continues sur I_k $(k\in\{1,2,3\})$.
  On résout sur I_k, k valant 1, 2 ou 3. On notera $\mathscr{S}_{I_k}$ l'ensemble des solutions de (L) sur I_k.
- L'équation homogène associée à (L) est

$$(H)\ :\ (1-x^2)y'+xy=0$$

  On obtient ses solutions sur I_k à l'aide d'une primitive de $x\mapsto\frac{x}{1-x^2}$ sur I_k : par exemple $x\mapsto-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|$
  Les solutions de (H) sur I_k sont donc les applications

$$y:\left|\begin{array}{ccl}I_k&\longrightarrow&\mathbb{K}\\x&\longmapsto&\lambda_k\mathrm{e}^{-\left(-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right)}=\lambda_k\sqrt{|1-x^2|}\end{array}\right.$$

  pour $\lambda_k\in\mathbb{K}$.
- Cherchons une solution particulière de (L) sur I_k. On peut voir $x\mapsto -x$ comme solution évidente de (L). Si on ne le voit pas ? Par la méthode de la variation de la constante, on cherche cette solution particulière sous la forme

$$f_0:\left|\begin{array}{ccl}I_k&\longrightarrow&\mathbb{K}\\x&\longmapsto&\lambda(x)\sqrt{|1-x^2|}\end{array}\right.$$

  où λ est une fonction dérivable sur I_k.
  f_0 est alors dérivable sur I_k par opérations et f_0 est solution de (L) sur I_k si et seulement si

$$\forall\, x\in I_k,\ (1-x^2)\lambda'(x)\sqrt{|1-x^2|}=-1$$

ie

$$\forall x\in I_k,\quad \lambda'(x)=-\frac{\varepsilon(x)}{|1-x^2|^{\frac32}}$$

où $\varepsilon(x)=1$ si $x\in]-1,1[$, -1 sinon.

* Sur $I_2=]-1,1[$, on pose $x=\sin t$, $t\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$,

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}^3}\,\mathrm{d}t=-\int\frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=-\tan t+C=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

* Sur $I_3=]1,\infty[$, on pose $x=\mathrm{ch}\,t$, $t\geqslant 0$, puis $u=\mathrm{th}\,t$:

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}^3}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{sh}\,t}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\,t-1}^3}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{ch}^2\,t-\mathrm{sh}^2\,t}{\mathrm{sh}^2\,t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{\mathrm{th}^2\,t}-1\,\mathrm{d}t$$
$$=\int\left(\frac{1}{u^2}-1\right)(1-u^2)\,\mathrm{d}u=\int\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u=-\frac{1}{\mathrm{th}\,t}+C=-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$$

* Sur $I_1=]-\infty,-1[$, on se ramène à I_1 en posant $y=-x$.

On obtient alors une solution particulière de (L) sur I_k :

$$f_0:\left|\begin{array}{ccl} I_k & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & -\dfrac{x}{\sqrt{|1-x^2|}}\sqrt{|1-x^2|}=-x\end{array}\right.$$

- L'ensemble des solutions de (L) sur I_k, pour $k\in[\![1,3]\!]$ est alors

$$\boxed{\mathscr{S}_{I_k}=\left\{y:\left|\begin{array}{ccl} I_k & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & \lambda_k\sqrt{|1-x^2|}-x\end{array}\right.\mid \lambda_k\in\mathbb{K}\right\}}$$

2. Raccord de solutions :

Analyse

Si on a une solution de (L) sur $\mathbb{R}$, alors il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f:\left|\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & \left|\begin{array}{ll} \lambda_1\sqrt{x^2-1}-x & \text{si } x<-1\\ f(-1) & \text{si } x=-1\\ \lambda_2\sqrt{1-x^2}-x & \text{si } -1<x<1\\ f(1) & \text{si } x=1\\ \lambda_3\sqrt{x^2-1}-x & \text{si } x>1\end{array}\right.\end{array}\right.$$

où λ_1, λ_2 et λ_3 sont des constantes.

On a $\lambda_1\sqrt{|1-x^2|}-x\xrightarrow[x\to-1^-]{}1$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to-1^-]{}1$.

Et $\lambda_2\sqrt{|1-x^2|}-x\xrightarrow[x\to-1^+]{}1$ donc $f(x)\xrightarrow[x\to-1^+]{}1$.

Pour qu'il y ait continuité en -1, il faut donc imposer $\boxed{f(-1)=1.}$

De même, on aura continuité en 1 si et seulement si $\boxed{f(1)=-1.}$

Dérivabilité en -1 :

- Si $x<-1$,

$$\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\frac{\lambda_1\sqrt{x^2-1}-x-1}{x+1}=-\frac{\lambda_1\sqrt{-x+1}}{\sqrt{-x-1}}-1$$

car $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{|x-1||x+1|}=\sqrt{-x+1}\sqrt{-x-1}$.

Mais $\dfrac{\sqrt{-x+1}}{\sqrt{-x-1}}\xrightarrow[x\to-1^-]{}+\infty$.

Pour avoir dérivabilité en -1 on doit donc imposer $\boxed{\lambda_1=0.}$

- De même, si $-1<x<1$, $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\dfrac{\lambda_2\sqrt{1-x^2}-x-1}{x+1}=\dfrac{\lambda_2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}-1$ car $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{|1-x||1+x|}=\sqrt{1-x}\sqrt{x+1}$.

Mais $\dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}\xrightarrow[x\to-1^+]{}+\infty$.

Pour avoir dérivabilité en -1 on doit donc imposer $\boxed{\lambda_2=0.}$

De même, pour assurer la dérivabilité en 1, il faut imposer $\boxed{\lambda_3=0.}$

Finalement, si on a une solution sur $\mathbb{R}$, il s'agit de $f_0:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & -x\end{array}\right.$.

Synthèse

$\boxed{f_0:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & -x\end{array}\right. \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et vérifie } (L) : \text{c'est la seule solution de } (L) \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Exercice 3 – Équation différentielle d'Euler

1. $t\mapsto t^\alpha$ est bien deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout α complexe et est solution de (H) si et seulement si pour tout $t>0$, $\alpha(\alpha-1)t^\alpha+a\alpha t^\alpha+bt^\alpha=0$ si et seulement si

$$\alpha(\alpha-1)+a\alpha+b=0$$

(car $t^\alpha\neq 0$) $\boxed{\text{si et seulement si } \alpha \text{ est racine de } P=X(X-1)+aX+b}$.

2. Soit $z=y\circ\exp$. On a alors que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z l'est, $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $y(t)=z(\ln t)$. Donc $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $y'(t)=\dfrac{1}{t}z'(\ln t)$ et $y''(t)=\dfrac{1}{t^2}z''(\ln t)-\dfrac{1}{t^2}z'(\ln t)$.

Ainsi, y est solution de (L) si et seulement si

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad z''(\ln t)-z'(\ln t)+az'(\ln t)+bz(\ln t)=g(t)$$

si et seulement si $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad z''(x)+(a-1)z'(x)+bz(x)=g(e^x).}$ (avec $x=\ln t$).

3.a) (L_1) $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$, $t^2y''(t)+5ty'(t)+4y(t)=t$ est équivalente d'après la question précédente à (L_1') $\forall x\in\mathbb{R}$, $z''(x)+4z'(x)+4z(x)=e^x$.

Son équation caractéristique est (E_1') $r^2+4r+4=(r+2)^2=0$ et elle admet $x\mapsto \frac{1}{9}\mathrm{e}^x$ comme solution évidente.

Les solutions de (L_1') sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $z\ :\ x\mapsto (A+Bx)\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{9}\mathrm{e}^x$ où $A,B\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Enfin, les solutions de } (L_1) \text{ sur } \mathbb{R}_*^+ \text{ sont les fonctions } y\ :\ t\mapsto \frac{A+B\ln t}{t^2}+\frac{t}{9} \text{ où } A,B\in\mathbb{R}.}$$

3.b) $(L_2)\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \ t^2y''(t)+y(t)=t+\frac{1}{t}$ est équivalente d'après la question précédente à $(L_2')\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ z''(x)-z'(x)+z(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$.

Son équation caractéristique est (E_2') $r^2-r+1=\left(r-\frac12-\mathrm{i}\frac{\sqrt3}{2}\right)\left(r-\frac12+\mathrm{i}\frac{\sqrt3}{2}\right)=0$, les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $x\mapsto\left(A\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$.

Comme $x\mapsto\mathrm{e}^x$ est solution de $z''(x)-z'(x)+z(x)=\mathrm{e}^x$ et $x\mapsto\frac{\mathrm{e}^{-x}}{3}$ est solution de $z''(x)-z'(x)+z(x)=\mathrm{e}^{-x}$, par principe de superposition, $x\mapsto\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{3}$ est solution de (L_2').

Les solutions de (L_2') sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions

$$z\ :\ x\mapsto\left(A\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}x\right)\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^x+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{3}$$

où $A,B\in\mathbb{R}$. Enfin, les solutions de (L_1) sur $\mathbb{R}_*^+$ sont les fonctions :

$$\boxed{y\ :\ t\mapsto\left(A\cos\left(\tfrac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+B\sin\left(\tfrac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\sqrt t+t+\frac{1}{3t} \text{ où } A,B\in\mathbb{R}.}$$

---

4. $\forall t>0,\ \ f'(t)=f\left(\frac1t\right)$.

Analyse : Une telle fonction est automatiquement deux fois dérivable et

$$\forall t>0,\ \ f''(t)=-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac1t\right)=-\frac{f(t)}{t^2}$$

donc f est solution de (H_2) $t^2y''(t)+y(t)=0$. D'après l'étude faite à la question précédente, on a donc A et B des réels tels que $\forall t>0,\ \ f(t)=\left(A\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\sqrt t$.

Remarquons aussi que nécessairement, $f'(1)=f(1)=A$.

Mais

$$\begin{aligned}\forall t>0,\ \ f'(t)=&\left(-A\frac{\sqrt3}{2t}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+B\frac{\sqrt3}{2t}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\sqrt t\\&+\left(A\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+B\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\frac{1}{2\sqrt t}.\end{aligned}$$

En $t=1$, on obtient $f'(1)=B\frac{\sqrt3}{2}+\frac{A}{2}$ donc $f'(1)=f(1)=A$ donc $B\frac{\sqrt3}{2}=\frac{A}{2}$ donc $A=B\sqrt3$.

On a donc $B\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t>0,\ \ f(t)=B\left(\sqrt3\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\sqrt t$.

Synthèse : Réciproquement, une telle fonction est dérivable et

$$\begin{aligned}\forall t>0,\ \ f'(t)&=B\left(\left(-\frac{3}{2t}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+\frac{\sqrt3}{2t}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\sqrt t\right.\\&\qquad\left.+\left(\sqrt3\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\frac{1}{2\sqrt t}\right)\\&=B\left(\sqrt3\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)-\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\frac{1}{\sqrt t}\\&=f\left(\frac1t\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont donc les } f\ :\ t\mapsto B\left(\sqrt3\cos\left(\tfrac{\sqrt3}{2}\ln t\right)+\sin\left(\tfrac{\sqrt3}{2}\ln t\right)\right)\sqrt t \text{ où } B\in\mathbb{R}.}$$