

Devoir Libre n° 8

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).

La rédaction est à soigner tout particulièrement!

N'hésitez à me demander des indications par mail.

Formule de Stirling par les intégrales de Wallis

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{12(n+1)^2} < \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 < \frac{1}{12n^2}$$

2. On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par

$$\forall n \geq 2, \quad x_n = \ln\left(e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\right) - \ln n! \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{12(n-1)}$$

2.a) Montrer que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont adjacentes. On notera D leur limite commune.

2.b) Montrer que $\forall n \geq 2, \quad D - \frac{1}{12(n-1)} < x_n < D$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

3.a) Pour $n \geq 0$, établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n .

3.b) En déduire pour $p \in \mathbb{N}$ les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} .

3.c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

3.d) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

3.e) En déduire que $\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2 n} \rightarrow \pi$.

4. En explicitant $x_{2n} - x_n$, montrer que $D = -\ln \sqrt{2\pi}$.

5. En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Devoir Libre n° 8

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les réponses, tirer un trait entre les questions et répondre de manière concise (mais complète).

La rédaction est à soigner tout particulièrement!

N'hésitez à me demander des indications par mail.

Formule de Stirling par les intégrales de Wallis

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{12(n+1)^2} < \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln n) - 1 < \frac{1}{12n^2}$$

2. On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par

$$\forall n \geq 2, \quad x_n = \ln\left(e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\right) - \ln n! \text{ et } y_n = x_n + \frac{1}{12(n-1)}$$

2.a) Montrer que les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont adjacentes. On notera D leur limite commune.

2.b) Montrer que $\forall n \geq 2, \quad D - \frac{1}{12(n-1)} < x_n < D$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

3.a) Pour $n \geq 0$, établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n .

3.b) En déduire pour $p \in \mathbb{N}$ les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} .

3.c) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

3.d) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. En déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

3.e) En déduire que $\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2 n} \rightarrow \pi$.

4. En explicitant $x_{2n} - x_n$, montrer que $D = -\ln \sqrt{2\pi}$.

5. En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$