

## Relations

- Pour déterminer une borne supérieure (on procède de manière similaire pour la borne inférieure) d'une partie  $A$  de  $\mathbb{R}$  :
  - \* on s'assure de son existence en vérifiant que  $A$  est non vide et majorée;
  - \* On essaye de trouver un majorant  $a$ , le plus petit possible : alors  $a \geq \sup A$ ;
  - \* Pour montrer ensuite que  $a = \sup A$ , on peut
    - soit prouver que  $a \in A$  et alors  $a = \max A = \sup A$ ,
    - soit prouver que tout autre majorant est nécessairement plus grand que  $a$ ,
    - soit prouver que dès que  $a' < a$ , on peut trouver  $x \in A$  tel que  $a' < x$  (caractérisation de la borne supérieure),
    - soit trouver une suite d'éléments de  $A$  qui tendent vers  $a$  (cela revient également à utiliser la caractérisation de la borne supérieure).

### Relations binaires

**1** (vu en cours) Déterminer les propriétés des relations binaires :

- |                            |                                     |  |
|----------------------------|-------------------------------------|--|
| 1. $\leq$ sur $\mathbb{R}$ | 4. $\perp$ sur $D$                  | 7. $\neq$ sur... n'importe quoi!                       |
| 2. $<$ sur $\mathbb{R}$    | 5. $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ . |  |
| 3. $//$ sur $D$            | 6. $=$ sur... n'importe quoi!       | 8. $z \mathcal{R} z' \iff z = z'^2$ sur $\mathbb{C}$ . |

### Relations d'équivalence

**2** (vu en cours) Montrer que les relations binaires suivantes sont des relations d'équivalence. En déterminer les classes d'équivalences.

- $\iff$  sur les assertions.
- $=$  sur n'importe quoi.
- $//$  sur l'ensemble des droites.
- Sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ ,  $(p, q) \mathcal{R} (p', q') \iff pq' = p'q$ .
- Sur l'ensemble des êtres humains, « a le même nom » ou « a le même sexe » ou « a les mêmes parents »
- La relation « est asymptote en  $+\infty$  à » sur l'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions réelles tendant vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .
- Si  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des points du plan, relation d'équipollence de deux bipoints :

$$\forall (A, B), (C, D) \in \mathcal{P}^2, (A, B) \mathcal{R} (C, D) \iff \vec{AB} = \vec{CD} \iff ABDC \text{ parallélogramme.}$$

- Si  $f$  est une fonction définie sur  $E$ ,  $x \mathcal{R} x' \iff f(x) = f(x')$  sur  $E$ .

**3** (vu en cours) Sur  $E = \{\text{suites réelles } u \text{ admettant une limite finie}\}$ . On définit la relation binaire

$$u \mathcal{R} v \text{ si et seulement si } \lim u = \lim v$$

- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- Montrer que  $E/\mathcal{R}$  est équipotent à  $\mathbb{R}$ .

**4** Dans  $\mathbb{C}$  on définit la relation  $\mathcal{R}$  par  $z \mathcal{R} z' \iff |z| = |z'|$ .

- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- Déterminer la classe d'équivalence de chaque  $z \in \mathbb{C}$ .
- Que représente l'ensemble quotient  $\mathbb{C}/\mathcal{R}$  de toutes les classes d'équivalences ?

**5** On définit sur  $\mathbb{R}$  la relation  $x \mathcal{R} y$  si et seulement si  $x^2 - y^2 = x - y$ .

- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- Calculer la classe d'équivalence d'un élément  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

**6** **Équipotence et paradoxe de Russel**

- Montrer que « être équipotent » pour des ensembles vérifie toutes les propriétés des relations d'équivalence.
- ♦ Et pourtant, on ne peut pas vraiment dire que c'en est une... Sinon il faudrait considérer « l'ensemble des ensembles » qui est un objet paradoxal. Si l'on considère sa partie des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes :

$$\mathcal{C} = \{A \text{ ensemble} \mid A \notin A\}$$

A-t-on  $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ? A-t-on  $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ ? (voir théorème de Cantor dans le TD sur les applications).

**7** Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  une bijection ( $f \in \mathcal{S}(E)$ ). On définit une relation  $\mathcal{R}$  sur  $E$  par  $x \mathcal{R} y \iff \exists n \in \mathbb{Z}, f^n(x) = y$ .

- Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.
- Montrer que, si  $C$  est une classe d'équivalence pour  $\mathcal{R}$ ,  $f(C) = C$ .
- Montrer que si un sous-ensemble non vide  $X$  de  $E$  vérifie  $f(X) = X$ , il est réunion de classes d'équivalences de  $\mathcal{R}$ .

### Relations d'ordre

**8** (vu en cours) Montrer qu'il n'existe pas d'ordre total sur  $\mathbb{C}$  compatible avec les opérations  $+$  et  $\times$ .

**9** (vu en cours)

1. Montrer que  $\leq$  est un ordre sur  $\mathbb{R}$ . Est-il total ?
2. Montrer que  $\subset$  est un ordre sur  $\mathcal{P}(E)$ . Est-il total ? Déterminer, s'ils existent,  $\min \mathcal{P}(E)$ ,  $\max \mathcal{P}(E)$ , et pour  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ ,  $\sup\{A, B\}$  et  $\inf\{A, B\}$ .
3. Montrer que  $|$  est un ordre sur  $\mathbb{N}$ . Est-il total ? Déterminer, s'ils existent,  $\min \mathbb{N}$  et  $\max \mathbb{N}$ .

**10** On définit une relation binaire  $\mathcal{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$x \mathcal{R} y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

Montrer que  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

**11** 

1. Soient  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné,  $A, B$  deux parties non vides de  $E$  telles que  $A \subset B$ .  
Montrer que si  $A$  et  $B$  admettent des bornes supérieures dans  $E$ ,  $\sup A \leq \sup B$ .
2. Donner trois exemples d'ensembles ordonnés  $(E, \leq)$  et de parties non vides  $A, B$  de  $E$  telles que  $A \subset B$  et telles que
  - (a)  $A$  admette une borne supérieure dans  $E$  mais pas  $B$ .
  - (b)  $A$  et  $B$  admettent des bornes supérieures distinctes dans  $E$ .
  - (c)  $\blacklozenge B$  admette une borne supérieure dans  $E$  mais pas  $A$ .

**12** **Ordre produit**

Soient  $(E, \leq)$  et  $(F, \leq)$  deux ensembles ordonnés,  $\mathcal{P}$  la relation définie sur  $E \times F$  par

$$(x, y) \mathcal{P} (x', y') \iff \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$$


1. Montrer que  $\mathcal{P}$  est un ordre sur  $E \times F$  appelé *ordre produit* des ordres de  $E$  et  $F$ .
2. On prend ici  $E = F = \mathbb{R}$  muni de son ordre usuel.
  - (a) Préciser, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble des majorants de  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\mathcal{P}$ . Faire une représentation graphique.
  - (b) L'ordre  $\mathcal{P}$  est-il total dans  $\mathbb{R}^2$  ?
  - (c) Est-ce que  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\mathcal{P}$  ? Si oui, la préciser.

**13** **Ordre lexicographique**

Soient  $(E, \triangleleft)$  ( $\triangleleft$  la relation d'ordre stricte associée) et  $(F, \leq)$  deux ensembles ordonnés,  $\mathcal{L}$  la relation définie sur  $E \times F$  par


$$(x, y) \mathcal{L} (x', y') \iff \begin{cases} x \triangleleft x' \\ \text{ou} \\ x = x' \text{ et } y \leq y' \end{cases}$$

1. Montrer que  $\mathcal{L}$  est un ordre sur  $E \times F$  appelé *ordre lexicographique* des ordres de  $E$  et  $F$ .
2. Montrer que si les ordres de  $E$  et  $F$  sont totaux, alors  $\mathcal{L}$  l'est.
3. On prend ici  $E = F = \mathbb{R}$  muni de son ordre usuel.
  - (a) Préciser, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , l'ensemble des majorants de  $(x, y)$  dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\mathcal{L}$ . Faire une représentation graphique.
  - (b) Est-ce que  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  admet une borne supérieure dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $\mathcal{L}$  ? Si oui, la préciser.

**14**  Soient  $X$  un ensemble et  $(F, \leq)$  un ensemble ordonné. Montrer que la relation binaire sur  $F^X$ , encore notée  $\leq$ , définie par

$$f \leq g \iff \forall x \in X, f(x) \leq g(x)$$


est une relation d'ordre. Montrer que même si l'ordre sur  $F$  est total, celui sur  $F^X$  peut ne pas l'être.

**15**  Déterminer, s'ils existent, les minimum/borne inférieure, maximum/borne supérieure des ensembles

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad B = \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{n} - n^2 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

**16** Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides majorées de  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $A \cup B$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  et déterminer sa borne supérieure.
2. Montrer que l'ensemble  $A+B = \{a+b \mid (a, b) \in A \times B\}$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  et déterminer sa borne supérieure.
3. Si  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  est fixé, montrer que l'ensemble  $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$  est une partie non vide majorée de  $\mathbb{R}$  et déterminer sa borne supérieure.

**17**  On considère une application  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  croissante. On souhaite démontrer que  $f$  possède un point fixe i.e.

$$\exists t \in [a, b], f(t) = t.$$

Soit  $T = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq x\}$ .

1. Montrer que  $T$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ . En déduire qu'elle possède une borne inférieure que l'on notera  $t$ .
2. Justifier que  $t \in [a, b]$ .
3. Montrer que  $T$  est stable par  $f$ .
4. Montrer que  $f(t)$  est un minorant de  $T$ .
5. En déduire que  $t = \inf T$  est un point fixe de  $f$ .
6. Le résultat est-il encore vrai si l'on considère  $f : [a, b[ \rightarrow [a, b[$  croissante ?