

Limites et continuité des fonctions numériques

1 Limite d'une fonction en un point

Les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{R} , et I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point, \bar{I} son adhérence (bornes finies incluses, sauf pour $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), $\overset{\circ}{I}$ son intérieur (bornes exclues).

1 Voisinage

Définition 1 : Voisinage d'un point

Si $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, on appelle **voisinage** de a toute partie V de \mathbb{R} telle qu'on ait $\varepsilon > 0$ pour lequel

$$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset V$$

c'est-à-dire tel que

$$|x - a| < \varepsilon \implies x \in V.$$

- Si $a = +\infty$, on appelle **voisinage** de a toute partie V de \mathbb{R} telle qu'on ait $A \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$[A, +\infty[\subset V$$

c'est-à-dire tel que

$$x \geq A \implies x \in V.$$

- Si $a = -\infty$, on appelle **voisinage** de a toute partie V de \mathbb{R} telle que $-V$ est un voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire telle qu'on ait $B \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$]-\infty, B] \subset V$$

c'est-à-dire tel que

$$x \leq B \implies x \in V.$$

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

On dit qu'une fonction f définie sur I vérifie une propriété au voisinage de a lorsqu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que cette propriété est vraie sur $I \cap V$.

2 Limite

Définition 2 : Limite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers a , et on note $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ si et seulement si pour tout voisinage de ℓ , il existe un voisinage de a sur lequel $f(x)$ reste dans le voisinage de ℓ . Autrement dit,

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(I \cap W) \subset V.$$

Définition 3 : Traduction pour $a \in \mathbb{R}$

Si $a \in \mathbb{R}$,

- si $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- si $\ell = +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A.$$

- si $\ell = -\infty$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$, ie

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq B.$$

Définition 4 : Traduction pour a infini

- si $a = +\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- si $a = \ell = +\infty$:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists A' \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A' \implies f(x) \geq A.$$

- si $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ssi $-f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$, ie

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \geq A \implies f(x) \leq B.$$

- si $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ssi $f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$, ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- si $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ ssi $f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ie

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B \implies f(x) \geq A.$$

- si $a = \ell = -\infty$: $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ ssi $-f(-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ie

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists B' \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \leq B' \implies f(x) \leq B.$$

**Propriété 1**

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et si f est définie en a , alors $\ell = f(a)$.

Propriété 2 : Unicité de la limite

Lorsque la limite existe, elle est unique et est alors noté $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Propriété 3

Si $\ell \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ \iff |f(x) - \ell| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Propriété 4 : convergente \Rightarrow localement bornée

Si f admet en a une limite finie, alors f est bornée au voisinage de a (on dit que f est **localement bornée**).

Propriété 5

Si $\ell \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et au voisinage de a , $|f(x) - \ell| \leq g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

3 Caractérisation séquentielle**Propriété 6 : Caractérisation séquentielle de la limite**

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \iff \forall (a_n)_n \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow a, f(a_n) \rightarrow \ell.$$

4 Limites et ordre**a Comparaison de la limite****Propriété 7**

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $\ell > c$, au voisinage de a , $f(x) > c$.
- Si $\ell > d$, au voisinage de a , $f(x) > d$.
- Si $c < \ell < d$, au voisinage de a , $c < f(x) < d$.

Corollaire 1 : convergente \Rightarrow localement bornée

Si f a une limite finie en a , f est bornée au voisinage de a .

b Passage des inégalités à la limite**Propriété 8 : Passage des inégalités à la limite**

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que

$$\text{H1 } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \text{ et } g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$$

H2 Au voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$)

Alors $\ell \leq \ell'$.

c Théorème de la limite d'un encadrement**Théorème 1 : limite finie par encadrement, $+\infty$ par minoration, $-\infty$ par majoration**

Si $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\text{H1 } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \text{ et } h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

H2 Au voisinage de a , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

De plus, si $\ell = +\infty$ (respectivement $\ell = -\infty$), on obtient la même conclusion avec seulement $g(x) \leq h(x)$ (respectivement $f(x) \leq g(x)$).

Cela permet de retrouver le

Corollaire 2

Si $\ell \in \mathbb{R}$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et au voisinage de a , $|f(x) - \ell| \leq g(x)$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

5 Opérations sur les limites**Propriété 9 : Composée de limites**

Si I, J intervalles de \mathbb{R} , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset J$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ élément ou borne de J et si $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Propriété 10 : Somme, produit, quotient de limites

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f(x) + g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell + \ell'$ lorsque cela a un sens,

(ii) $\lambda f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda \ell$ lorsque cela a un sens,

(iii) $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \ell'$ lorsque cela a un sens,

(iv) • Si $\ell \neq 0$, au voisinage de a , $f(x) \neq 0$ et $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell}$ (avec $\frac{1}{\pm\infty} = 0$).

- Si au voisinage de a , $f(x) > 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
- Si au voisinage de a , $f(x) < 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors $\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

Propriété 11 : Produit d'une suite localement bornée et d'une suite tendant vers 0

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et g est bornée au voisinage de a , alors $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Définition 7

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, a élément ou borne de I , et si au voisinage de a , $g(x) \neq 0$, on dit que

- f est **dominée** par g au voisinage de a et on note $f = o_a(g)$ ou $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ lorsque $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .
- f est **négligeable** devant g au voisinage de a et on note $f = o_a(g)$ ou $f \ll_a g$ ou $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$ ou $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- f est **équivalente** à g au voisinage de a et on note $f \sim_a g$ ou $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ lorsque $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$, c'est-à-dire $f = g + o_a(g)$.

6 Limites à gauche et à droite

Définition 5 : Limite à gauche, à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$ élément ou borne de I . On dit que f admet ℓ comme **limite à gauche** (respectivement **à droite**), ou **par valeurs inférieures** (respectivement **par valeurs supérieures**), et on note

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$$

ou

$$f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} \ell$$

(respectivement $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} \ell$) lorsque

$$f|_{]-\infty, a[\cap I} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

(respectivement $f|_{]a, +\infty[\cap I} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$).

Définition 6 : Limite lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$

Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$ et f est définie sur $I \setminus \{a\}$, on dit que f admet une limite en a lorsque

- f admet une limite ℓ_- à gauche de a ,
- f admet une limite ℓ_+ à droite de a ,
- $\ell_+ = \ell_-$.

On note alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell (= \ell_- = \ell_+)$.

2 Propriétés

Toutes les propriétés vues sur les suites restent valable.

Propriété 12 : Changement de variable

Si $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, a élément ou borne de I , b élément ou borne de J , $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi(J) \subset I$ et $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow b} a$, alors

- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, alors $f(\varphi(t)) = o_{t \rightarrow b}(g(\varphi(t)))$.
- Si $f(x) = o_{x \rightarrow a}(g(x))$, alors $f(\varphi(t)) = o_{t \rightarrow b}(g(\varphi(t)))$.
- Si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$, alors $f(\varphi(t)) \sim_{x \rightarrow a} g(\varphi(t))$.

Les pièges sont les mêmes que pour les suites : pas de somme ou de différence d'équivalents, pas « $f - g \rightarrow 0$ », pas d'équivalent à 0, pas de composition par des fonctions à gauche.

- $e^{f(x)} \sim e^{g(x)} \iff f(x) - g(x) \rightarrow 0$
- Si $f(x) \sim g(x)$ avec pour tout x , $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$, au voisinage de a , $g(x) \neq 1$ et si $g(x) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ avec $\boxed{\ell \neq 1}$, alors $\ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

En effet,

$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x) - g(x)}$$

$$\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln g(x)} \rightarrow 1 \text{ car } \ln\left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right) \rightarrow 0 \text{ et } \ln g(x) \rightarrow \ln \ell \neq 0 \text{ OU } \pm\infty.$$

III Comparaison asymptotique

1 Définition



Propriété 13 : Croissances comparées

Si $\alpha, \beta, \gamma > 0$,

$$\ln^\gamma(x) \ll_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ll_{x \rightarrow +\infty} e^{\beta x}$$

Propriété 14

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors

$$f(x) - f(a) \sim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a).$$

Propriété 15 : Équivalents usuels en 0

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé.

- $\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $\tan x \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $\cos x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}$
- $\ln(1+x) \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $e^x - 1 \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $(1+x)^\alpha - 1 \sim_{x \rightarrow 0} \alpha x$
- $\text{Arctan } x \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $\text{Arcsin } x \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $\text{sh } x \sim_{x \rightarrow 0} x$
- $\text{th } x \sim_{x \rightarrow 0} x$

Si $f(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n$ avec $p \leq n$, $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$, alors

$$f(x) \sim_{x \rightarrow 0} a_p x^p \quad \text{et} \quad f(x) \sim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n.$$

(iii) Si $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$, et si f continue en a et h continue en $f(a)$, alors $h \circ f$ est continue en a .

Rappel :

Définition 9 : Prolongement par continuité

Si $f : I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors on appelle **prolongement par continuité** de f en a l'application $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$ et $g(a) = \ell$.

2 Continuité à gauche, à droite

Définition 10 : Continuité à gauche et à droite

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

- f est continue à droite de a si et seulement si $I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$ et $f|_{I \cap]a, +\infty[}$ est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.
- f est continue à gauche de a si et seulement si $I \cap]-\infty, a[\neq \emptyset$ et $f|_{I \cap]-\infty, a[}$ est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^-} f(a)$.

Propriété 17

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.
 f est continue en a

$$\iff \begin{cases} f \text{ est continue à gauche de } a \\ f \text{ est continue à droite de } a \end{cases}$$

Continuité

1 Continuité en un point

Définition 8 : Continuité en un point

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.
 f est dite continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Les propriétés suivantes sont de simples conséquences des propriétés sur les limites

Propriété 16

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) **Caractérisation séquentielle** : f est continue en a si et seulement si

$$\forall (a_n) \in I^{\mathbb{N}} \mid a_n \rightarrow a, f(a_n) \rightarrow f(a).$$

(ii) Si f et g continues en a , $f+g$, $f \times g$, λf le sont aussi. Si, de plus, g ne s'annule pas au voisinage de a , $\frac{f}{g}$ l'est aussi.

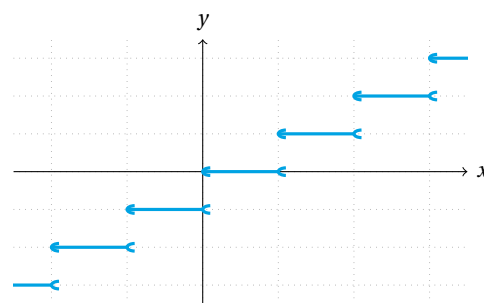


Figure 1 – La fonction $\lfloor \cdot \rfloor$

3 Continuité sur un intervalle

Définition 11 : Continuité sur un intervalle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite **continue sur** I lorsque f est continue en tout point de I .
 On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble de telles fonctions.

Propriété 18

Soient $f, g \in \mathcal{C}(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (i) $f + g, f \times g, \lambda f \in \mathcal{C}(I)$.
- (ii) $(\mathcal{C}(I), +, \times)$ est un sous-anneau $(\mathbb{R}^I, +, \times)$.
- (iii) Si $h \in \mathcal{C}(J)$ tel que $f(I) \subset J$, $h \circ f \in \mathcal{C}(I)$.
- (iv) Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}(I)$.
- (v) $|f|, \inf(f, g), \sup(f, g) \in \mathcal{C}(I)$.
- (vi) Si J intervalle non vide tel que $J \subset I$, $f|_J \in \mathcal{C}(J)$.

4 Théorème des valeurs intermédiaires et image continue d'un intervalle

Théorème 2 : des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $m \in]f(a), f(b)[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $m = f(c)$.

Autrement dit, $]f(a), f(b)[\subset f(]a, b[)$.

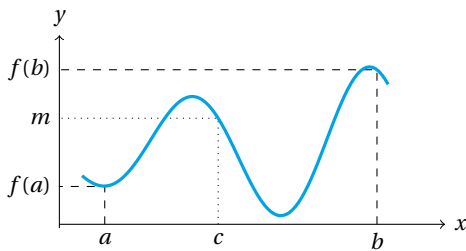


Figure 2 – Le théorème des valeurs intermédiaires

Corollaire 3 : Extension du théorème des valeurs intermédiaires

Si $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $]a, b[$ et admet des limites $\lim_{a^+} f$ à droite de a et $\lim_{b^-} f$ à gauche de b , alors pour tout $m \in]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$, on a $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = m$.

Autrement dit, $]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[\subset f(]a, b[)$.

Corollaire 4 : Image continue d'un intervalle

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Autrement dit, si f est continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

5 Continuité sur un segment

Théorème 3 : des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et si f est continue sur le segment $[a, b]$, alors on a $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = \min_{[a,b]} f$ et $f(d) = \max_{[a,b]} f$.

Corollaire 5 : Image continue d'un segment

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Avec les notations précédentes, f étant continue sur $[a, b]$,

$$f([a, b]) = \left[\min_{[a,b]} f, \max_{[a,b]} f \right] = [f(c), f(d)]$$

6 Continuité et injectivité

Propriété 19

Si f est continue et injective sur un intervalle I , f est strictement monotone sur I .

Propriété 20

Si f est continue et strictement monotone sur I , alors $f(I)$ est donné par

I	$[a, b]$	$]a, b[$
$f \nearrow$	$[f(a), f(b)]$	$[f(a), \lim_{b^-} f[$
$f \searrow$	$[f(b), f(a)]$	$]\lim_{b^-} f, f(a)]$
I	$]a, b]$	$]a, b]$
$f \nearrow$	$]\lim_{a^+} f, f(b)]$	$]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$
$f \searrow$	$[f(b), \lim_{a^+} f[$	$]\lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$

(les limites existant bien).

Lemme 1

Si f est monotone sur un intervalle I et $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I .



Théorème 4 : de la bijection

Soit f une fonction, I un intervalle tels que

H1 f est continue sur I ;

H2 f est strictement monotone sur I .

Alors

C1 f induit une bijection \tilde{f} de I sur $J = f(I)$;

C2 \tilde{f}^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f ;

C3 \tilde{f}^{-1} est continue sur J .

Définition 12 : Homéomorphisme (HP)

$f : I \rightarrow J$ est appelé **homéomorphisme** lorsque f est bijective et bicontinue, c'est-à-dire f continue sur I et f^{-1} est continue sur J .

Le « théorème de la bijection » se reformule alors en

Théorème 5 : de l'homéomorphisme

Toute fonction continue strictement monotone induit de I sur $J = f(I)$ un homéomorphisme.

IV

Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

La notion de limite s'étend, comme pour les suites, aux fonctions à valeurs complexes. Pas de limite infinie possible, et une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I pour $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in I, x \in V \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

où V est à adapter selon que a est fini ($\eta > 0 \dots$), $+\infty$ ($A \in \mathbb{R} \dots$) ou $-\infty$ ($B \in \mathbb{R} \dots$).

Les propriétés ne faisant pas intervenir l'ordre sont toujours valables, en particulier la caractérisation séquentielle.

Les comparaisons asymptotiques et la continuité s'étendent naturellement également aux fonctions à valeurs complexes.

Propriété 21

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ avec I intervalle de \mathbb{R} , $a \in \overline{\mathbb{R}}$ élément ou borne de I , $\ell = \ell_1 + i\ell_2 \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 + i\ell_2 \iff \begin{cases} \Re f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \\ \Im f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2 \end{cases}$$

f est continue en a (respectivement sur I) si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ le sont.