

Programme de colle – MP2I

Groupes

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Loi de composition interne	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable.	On évite l'étude de lois artificielles. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.
b) Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , groupes multiplicatifs \mathbb{Q}^* , \mathbb{Q}_+^* , \mathbb{R}^* , \mathbb{R}_+^* , \mathbb{C}^* , \mathbb{U} , \mathbb{U}_n . Notation S_X .
Groupe des permutations d'un ensemble. Groupe produit. Sous-groupe : définition, caractérisation.	

L'ensemble des permutations de E est noté $\mathfrak{S}(E)$.

Groupe symétrique

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence, unicité, commutativité.	Notation S_n . Notation $(a_1 a_2 \dots a_p)$. La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation.
b) Signature d'une permutation	
Décomposition d'une permutation en produit de transpositions. Signature : il existe un unique morphisme de groupes de S_n dans $\{-1, 1\}$ envoyant toute transposition sur -1 .	La démonstration n'est pas exigible.

La notion d'ordre d'une permutation a été introduite, ainsi que le sous-groupe alterné.

Semaines prochaines : Fonctions numériques : limite, continuité, dérivabilité.

Questions de cours :

- (i) Définition d'élément neutre, symétrique. Unicité (pour les deux). Symétrique de $x+y$ et du symétrique de x .
- (ii) Intersection, réunion de sous-groupes.
- (iii) Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
- (iv) Définition d'un morphisme de groupe, de son noyau. Il est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre.
- (v) Une composée de morphismes de groupe est un morphisme de groupe. La réciproque d'un isomorphisme en est un. Groupe des automorphismes.
- (vi) L'image et le noyau d'un morphisme de groupes sont des sous-groupes.
- (vii) Des permutations à support disjoint commutent.
- (viii) La signature est un morphisme de groupes (à partir de jeudi).