Devoir Libre n° 7

Sujet 1 – MP2I

Exercice 1 : Applications

1. (a) Deux choses à montrer : d'abord que $f(x)$ a bien un sens pour $x \in E$ (facile) puis que $f(x) \in E$ c'est-à-dire $f(x) \neq \frac{a}{c}$, ce qui provient de la condition $a^2 + bc \neq 0$.

   Donc f est bien définie.

   (b) On calcule $f \circ f = \mathrm{id}_E$. On en déduit que f est involutive, et en particulier bijective

   avec $f^{-1} = \mathrm{id}_E$.

2. Pour tout $x \in E$, on a $(g \circ f_1)(x) = (g \circ f_2)(x)$ c'est-à-dire $g(f_1(x)) = g(f_2(x))$ donc $f_1(x) = f_2(x)$. Ainsi, $f_1 = f_2$.

Exercice 2 : Relation d'équivalence

1. $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f$ donc $f \mathrel{\mathscr{R}} f$
   Si $f \mathrel{\mathscr{R}} g$ alors il existe $\varphi \in \mathfrak{S}(E)$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ mais alors $g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f$ avec $\varphi^{-1} \in \mathfrak{S}(E)$, donc $g \mathrel{\mathscr{R}} f$.
   Si $f \mathrel{\mathscr{R}} g$ et $g \mathrel{\mathscr{R}} h$ alors il existe $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}(E)$ telles que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ et $g \circ \psi = \psi \circ h$ donc $f \circ \theta = \theta \circ h$ avec $\theta = \varphi \circ \psi \in \mathfrak{S}(E)$. Ainsi, $f \mathrel{\mathscr{R}} h$.

   Finalement, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Pour $g \in E^E$, $g \in \mathrm{cl}(f) \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E),\ g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$. Finalement, $\mathrm{cl}(f) = \{\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \mid \varphi \in \mathfrak{S}(E)\}$.

Exercice 3 : Relation d'ordre produit

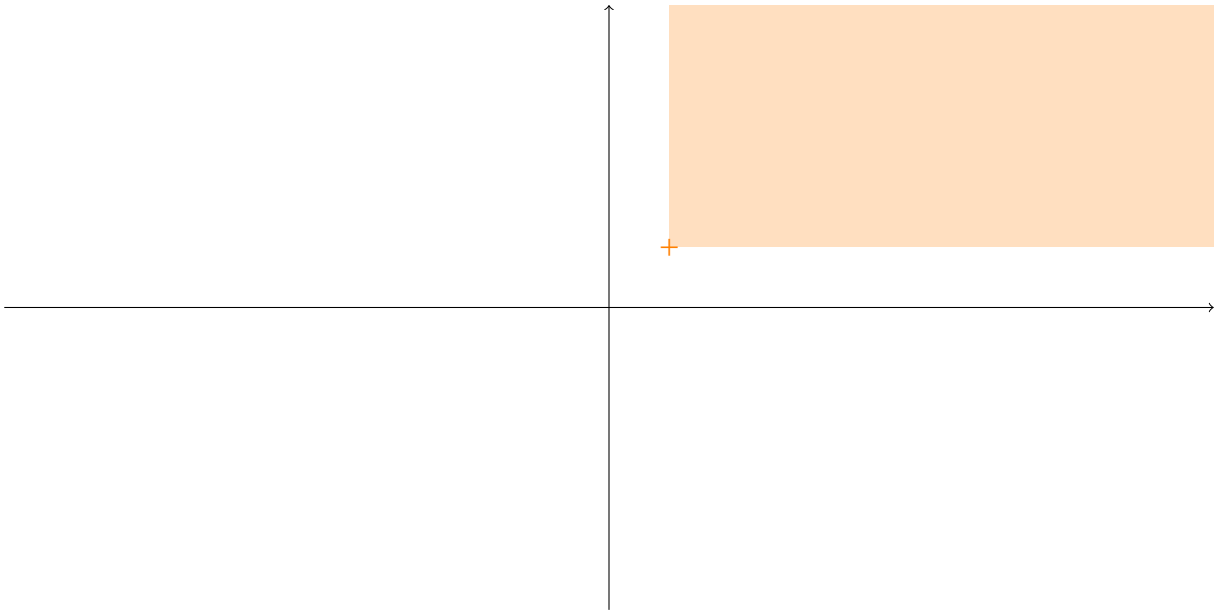
1.

- **Réflexivité** : si $(x, y) \in E \times F$, $x \preccurlyeq x$ et $y \preceq y$ par réflexivité de $\preccurlyeq$ sur E et de $\preceq$ sur F, donc $(x, y) \mathscr{P} (x, y)$.
- **Antisymétrie** : si $(x, y) \mathscr{P} (x', y')$ et $(x', y') \mathscr{P} (x, y)$, alors $x \preccurlyeq x' \preccurlyeq x$ et $y \preceq y' \preceq y$ donc par antisymétrie de $\preccurlyeq$ et $\preceq$, $(x, y) = (x', y')$.
- **Transitivité** : si $(x, y) \mathscr{P} (x', y')$ et si $(x', y') \mathscr{P} (x'', y'')$ alors $x \preccurlyeq x' \preccurlyeq x''$ et $y \preceq y' \preceq y''$ donc par transitivité de $\preccurlyeq$ et $\preceq$, $x \preccurlyeq x''$ et $y \preceq y''$, donc $(x, y) \mathscr{P} (x'', y'')$.

Ainsi, $\mathscr{P}$ est un ordre sur $E \times F$.

2.a) Les majorants de (x, y) sont les couples (x', y') avec

$$x' \geqslant x \text{ et } y' \geqslant y.$$



2.b) L'ordre $\mathscr{P}$ n'est pas total : par exemple $(1,0)$ et $(0,1)$ ne sont pas comparable.

2.c) $(0,0)=\sup\left(\mathbb{R}_-^*\right)^2$.

En effet, si $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_-^*\right)^2$, $(x,y)\mathscr{P}(0,0)$, donc $(0,0)$ majore $\left(\mathbb{R}_-^*\right)^2$ pour $\mathscr{P}$.
De plus, si (M,M') est un majorant de $\left(\mathbb{R}_-^*\right)^2$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{n}\leqslant M \text{ et } -\frac{1}{n}\leqslant M'.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $M\geqslant 0$ et $M'\geqslant 0$ donc $(0,0)\mathscr{P}(M,M')$.
Ainsi, $(0,0)$ est le plus petit des majorants de $\left(\mathbb{R}_-^*\right)^2$.