Devoir Libre n° 7

Sujet 1 – MP2I*

Exercice 1 : Applications

Attention : ne pas confondre F ensemble et F fonction... (notation malheureuse).

1.a) Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Si $y \in F \circ G(B) = f\left(f^{(-1)}(B)\right)$, alors on a $x \in f^{(-1)}(B)$ tel que $y = f(x)$ donc $y \in B \cap f(E)$.

Réciproquement, si $y \in B \cap f(E)$, on a $x \in E$ tel que $y = f(x) \in B$ donc $x \in f^{(-1)}(B)$ et $y \in f\left(f^{(-1)}(B)\right)$. Finalement $\boxed{F \circ G(B) = f\left(f^{(-1)}(B)\right) = B \cap f(E).}$

1.b) Si $B \in \mathscr{P}(F)$, d'après la question précédente,

$$G \circ F \circ G(B) = G(B \cap f(E)) = f^{(-1)}(B \cap f(E)) = f^{(-1)}(B) \cap f^{(-1)}(f(E)).$$

Or $f^{(-1)}(f(E)) = E$ car f est bien définie, donc $G \circ F \circ G(B) = f^{(-1)}(B)$ et $\boxed{G \circ F \circ G = G.}$

Si $A \in \mathscr{P}(E)$, d'après la question précédente, $F \circ G \circ F(A) = F(A) \cap f(E) = f(A) \cap f(E) = f(A)$ car $A \subset E$. Donc $\boxed{F \circ G \circ F = F.}$

2.

- Si f est injective,
  - ⋆ Si $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ tels que $F(A) = F(A')$, c'est-à-dire $f(A) = f(A')$, alors si $x \in A$, $f(x) \in f(A) = f(A')$ donc on a $x' \in A'$ tel que $f(x) = f(x')$ puis $x = x'$ par injectivité et donc $x \in A'$. Ainsi $A \subset A'$ et par symétrie, $A = A'$. Ainsi, $\boxed{f \text{ injective} \Longrightarrow F \text{ injective.}}$
  - ⋆ Si $A \in \mathscr{P}(E)$, soit $B = f(A) = F(A)$. On montre que $A = G(B) = f^{(-1)}\left(f(A)\right)$.[1] En effet, si $x \in A$, $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{(-1)}(f(A))$ et si $x \in f^{(-1)}(f(A))$ donc $f(x) \in f(A)$ et par injectivité de f comme dans le point précédent, $x \in A$. Ainsi, $\boxed{f \text{ injective} \Longrightarrow G \text{ surjective.}}$
- Si f est surjective,
  - ⋆ Si $B \in \mathscr{P}(F)$, soit $A = f^{(-1)}(B) = G(B) \in \mathscr{P}(E)$. Alors $F(A) = F \circ G(B) = B \cap f(E)$ d'après 1.a. Comme f est surjective, $f(E) = F$ et $F(A) = B$. Ainsi, $\boxed{f \text{ surjective} \Longrightarrow F \text{ surjective.}}$
  - ⋆ Si $B, B' \in \mathscr{P}(F)$ tels que $G(B) = G(B')$, c'est-à-dire $f^{(-1)}(B) = f^{(-1)}(B')$, alors si $y \in B$, par surjectivité de f, on a $x \in E$ tel que $y = f(x) \in B$ donc $x \in f^{(-1)}(B) = f^{(-1)}(B')$ donc $y = f(x) \in B'$. Ainsi $B \subset B'$ et par symétrie, $B = B'$. Ainsi, $\boxed{f \text{ surjective} \Longrightarrow G \text{ injective.}}$

    Ou encore : $F \circ G(B) = F \circ G(B')$ donc, par 1.a et comme $f(E) = F$ par surjectivité, $B = B'$ et G est injective.
- Si F est injective, si $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x') = y$, alors avec $A = \{x\}$ et $A' = \{x'\}$, $F(A) = F(A') = \{y\}$ donc par injectivité $A = A'$ et donc $x = x'$. Finalement, $\boxed{F \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ injective.}}$

1. Voir exercice de TD : Pour tout $A \subset E$, $A \subset f^{(-1)}(f(A))$ avec égalité pour tout A si et seulement si f injective.

- Si F est surjective, on a $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $F = f(A)$. Alors $F = f(A) \subset f(E) \subset F$ donc $f(E) = F$. Ainsi, $\boxed{F \text{ surjective} \Longrightarrow f \text{ surjective.}}$
- Si f n'est pas surjective, on a $y \in F$ qui n'admet pas d'antécédent par f. Alors $G(\{y\}) = G(\varnothing)$ et $\{y\} \neq \varnothing$. Par contraposée, $\boxed{G \text{ injective} \Longrightarrow f \text{ surjective.}}$
- Si G est surjective et f n'est pas injective, on a $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Par surjectivité de G, avec $A = \{x\}$, on a $B \in \mathscr{P}(F)$ tel que $f^{(-1)}(B) = A = \{x\}$. Donc $f(x) \in B$, puis $f(x') \in B$ et enfin $x' \in f^{(-1)}(B) = A = \{x\}$, donc $x = x'$, ce qui est contradictoire. Par l'absurde, $\boxed{G \text{ surjective} \Longrightarrow f \text{ injective.}}$

---

3. Si $f_1, f_2 \in F^E$ sont tels que $F_1 = \pi(f_1) = \pi(f_2) = F_2$, et si $x \in E$, avec $A = \{x\}$,

$$f_1(A) = \{f_1(x)\} = F_1(A) = F_2(A) = f_2(A) = \{f_2(x)\}$$

donc $f_1(x) = f_2(x)$ et $f_1 = f_2$. Ainsi, $\boxed{\pi \text{ est injective.}}$

Soit $H : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & \varnothing \end{array} \right.$ Alors H n'a pas d'antécédent par π car si $f \in F^E$, on a toujours $f(E) = F(E) \neq \varnothing$. Donc $\boxed{\pi \text{ n'est pas surjective.}}$

---

4. Si $f_1, f_2 \in F^E$ sont tels que $G_1 = \Theta(f_1) = \Theta(f_2) = G_2$, et si $x \in E$, avec $B = \{f_1(x)\}$,
$x \in f_1^{(-1)}(B) = G_1(B) = G_2(B) = f_2^{(-1)}(B)$ donc $f_2(x) \in B$ donc $f_2(x) = f_1(x)$ et ainsi $f_1 = f_2$.
Ainsi, $\boxed{\Theta \text{ est injective.}}$

Exercice 2 : Une relation d'ordre sur les partitions d'un ensemble fini (d'après ENS Ulm)

1. Les ensembles $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ sont non vides, disjoints deux à deux, et de réunion E. Donc $\boxed{P_+ \in \mathscr{P}.}$

$\boxed{P_- = \{E\} \text{ est bien une partition de } E}$ (E étant non vide...)

---

2. Soit $P = \{P_1, \ldots, P_s\} \in \mathscr{P}$.
Comme $E = \bigcup_{j \in [\![1,s]\!]} P_j$, avec $[\![1,s]\!] = \{j \in [\![1,s]\!] \mid P_j \cap E = P_j \neq \varnothing\}$ (car P est une partition de E), on a bien $\boxed{P_- \leqslant P.}$

Puis, pour tout $i \in [\![1,s]\!]$, $P_i = \bigcup_{j \in P_i} \{j\}$. Or $J_i = \{j \in [\![1,n]\!] \mid \{j\} \cap P_i \neq \varnothing\} = P_i$. On a donc bien $\boxed{P \leqslant P_+}$.
Remarque : on a donc même que $P_+ = \max \mathscr{P}$ et $P_- = \min \mathscr{P}$.

---

3. Soient $P, Q \in \mathscr{P}$, avec les notations $P = \{P_1, \ldots, P_s\}$ et $Q = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$.

- Si $P \leqslant Q$, et si $i \in [\![1,s]\!]$ et $j \in [\![1,t]\!]$ tels que $P_i \cap Q_j \neq \varnothing$, alors $j \in J_i$ et donc $Q_j \subset \bigcup_{j \in J_i} Q_j = P_i$.

- Réciproquement, si pour tous $i \in [\![1,s]\!]$ et $j \in [\![1,t]\!]$, $P_j \cap Q_j \neq \varnothing \Longrightarrow Q_j \subset P_i$, alors si $i \in [\![1,s]\!]$, pour tout $j \in J_i$, $Q_j \subset P_i$, donc $\bigcup_{j \in J_i} Q_j \subset P_i$. De plus, si $x \in P_i$, alors il existe (exactement) un $j \in [\![1,t]\!]$ tel que $x \in Q_j$ car Q est une partition de E. On a alors $j \in J_i$ et $x \in \bigcup_{j \in J_i} Q_j$, et donc $P_i \subset \bigcup_{j \in J_i} Q_j$.

  Finalement, $P_i = \bigcup_{j \in J_i} Q_j$.

  Ainsi, $P \leqslant Q$.

En résumé, $\boxed{P \leqslant Q \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,s]\!] \times [\![1,t]\!],\ \ P_i \cap Q_j \neq \varnothing \Longrightarrow Q_j \subset P_i.}$

4.

- **Reflexivité** : si $P \in \mathscr{P}$, $P \leqslant P$.

  En effet, avec $P = \{P_1, \ldots, P_s\}$, si $(i,j) \in [\![1,s]\!]^2$, $P_i \cap P_j \neq \varnothing \Longrightarrow i = j \Longrightarrow P_j \subset P_i$. Donc d'après la question précédente, $P \leqslant P$.

- **Antisymétrie** : Si $P, Q \in \mathscr{P}$ sont tels que $P \leqslant Q$ et $Q \leqslant P$, alors d'après la question précédente, si $(i,j) \in [\![1,s]\!] \times [\![1,t]\!]$ tels que $P_i \cap Q_j \neq \varnothing$, alors $P_i \subset Q_j$ et $Q_j \subset P_i$, donc $P_i = Q_j$.

  Or comme $\bigcup_{i \in [\![1,s]\!]} P_i = E$, étant donné $j \in [\![1,t]\!]$, on peut toujours trouver $i \in [\![1,s]\!]$ tel que $P_i \cap Q_j \neq \varnothing$, et donc $Q_j = P_i$. Cela donne en particulier $t \leqslant s$ et $Q = \{Q_1, \ldots, Q_t\} \subset \{P_1, \ldots, P_s\} = P$.

  Par symétrie, $s = t$ et $P = Q$.

- **Transitivité** : Si $P, Q, R \in \mathscr{P}$ sont tels que $P \leqslant Q \leqslant R$, avec $P = \{P_1, \ldots, P_s\}$, $Q = \{Q_1, \ldots, Q_t\}$ et $R = \{R_1, \ldots, R_r\}$, alors si on a $1 \leqslant i \leqslant s$ et $1 \leqslant k \leqslant r$ tels que $P_i \cap R_k \neq \varnothing$, comme les Q_j forment une partition de E, on a un $j \in [\![1,t]\!]$ tel que $(P_i \cap R_k) \cap Q_j \neq \varnothing$. Alors $P_i \cap Q_j \neq \varnothing$ et $R_k \cap Q_j \neq \varnothing$, donc d'après la question précédente, $R_k \subset Q_j \subset P_i$ donc $R_k \subset P_i$. Finalement, toujours d'après la question précédente, $P \leqslant R$.

  Donc $\boxed{\leqslant \text{ est une relation d'ordre sur } \mathscr{P}.}$

---

5. Si $n = 1$, $E = \{1\}$ et la seule partition est $\{\{1\}\}$, donc l'ordre est total.

Si $n = 2$, $E = \{1,2\}$ et les seules partitions sont $P_- = \{\{1\},\{2\}\}$ et $P_+ = \{\{1,2\}\}$, donc l'ordre est total vu 2.

Si $n \geqslant 3$, vu la question 3, $P = \{\{1,2\},\{3,\ldots,n\}\}$ et $Q = \{\{1,3\},\{2,4,5\ldots,n\}\}$ ne sont pas comparables car on n'a jamais $Q_j \subset P_i$ ni $P_i \subset Q_j$: l'ordre est partiel.

Ainsi $\boxed{\text{l'ordre et total si et seulement si } n \leqslant 2.}$