Devoir Libre n° 8

Formule de Stirling par les intégrales de Wallis

1. On pose $f : x \mapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)(\ln(x+1)-\ln x)-1-\frac{1}{12(x+1)^2}$ et $g : x \mapsto \left(x+\frac{1}{2}\right)(\ln(x+1)-\ln x)-1-\frac{1}{12x^2}$.

f et g sont deux fois dérivables sur $[1,+\infty[$ par opérations, et, après calculs (fort laborieux !!!), $f'' : x \mapsto \frac{2x+1}{2x^2(x+1)^4}$ et $g'' : x \mapsto -\frac{2x+1}{2x^4(x+1)^2}$.

On en déduit que f' est strictement croissante et g' strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
On vérifie ensuite que

$$f'(x)=\frac{1}{6(x+1)^3}-\frac{x+1/2}{x^2+x}+\ln\frac{x+1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et

$$g'(x)=\frac{1}{6x^3}-\frac{x+1/2}{x^2+x}+\ln\frac{x+1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

donc $f'<0$ et $g'>0$, puis f est strictement décroissante et g est strictement croissante.

Enfin, $f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{x+1}{x}-1-\frac{1}{12(x+1)^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ en utilisant... des outils que nous n'avions pas encore vu (oui, cette question était mal posée...) ce qui donne $f\geqslant 0$ et $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ ce qui donne $g\leqslant 0$.

On conclut que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{12(n+1)^2}<\left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln n)-1<\frac{1}{12n^2}$.

2.a) On simplifie $x_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n-n-\ln(2)-\cdots-\ln n$. Alors, d'une part,

$$x_{n+1}-x_n=\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1)-n-1-\ln(n+1)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n+n=\left(n+\frac{1}{2}\right)(\ln(n+1)-\ln n)-1>0$$

d'après la question précédente donc (x_n) est strictement croissante.

D'autre part, d'après la question précédente,

$$y_{n+1}-y_n=x_{n+1}-x_n+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12(n-1)}\leqslant\frac{1}{12n^2}-\frac{1}{12n(n-1)}<0$$

donc (y_n) est strictement décroissante.

De plus, $y_n-x_n=\frac{1}{12(n-1)}\to 0$.

Ainsi, x et y sont strictement adjacentes et donc convergent vers une même limite D.

2.b) Par la stricte adjacence, si $n\geqslant 2$, $x_n<D<y_n=x_n+\frac{1}{12(n-1)}$, d'où $D-\frac{1}{12(n-1)}<x_n<D$.

3.a) Voir cours.

3.b) Voir cours.

3.c) Vu les expressions de la question précédente, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n>0$.

3.d) Sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^n x \geqslant \sin^{n+1} x$ et comme $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, cela donne $I_n \geqslant I_{n+1}$, ainsi (I_n) est décroissante.

Ainsi, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, puis, avec la question précédente, $\boxed{\frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.}$

Or $\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+2}{n+1} \to 1$ donc, par encadrement, $\boxed{I_{n+1} \sim I_n.}$

3.e) On a alors $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \sim I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$, d'où $\pi \sim \frac{2\left(2^{2n}\right)^2(n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)} \sim \frac{\left(2^{2n}\right)^2(n!)^4}{(2n)!^2 n)}$.

Donc $\boxed{\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2 n} \longrightarrow \pi.}$

---

4. On a

$$\begin{aligned}
x_{2n} - x_n &= \ln\left(\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\right) - \ln(2n)! - \ln\left(\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\right) + \ln n! \\
&= \ln \frac{\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} n!}{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}(2n)!} \\
&= \ln \frac{\mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2} \cdot 2^{2n} n!}{(2n)!} \\
&= \ln\left(\frac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2}}{n!} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\right) \\
&= x_n + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2 n}\right) \\
&\longrightarrow D + \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\pi = D + \ln\sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

d'après la question précédente et la continuité de ln.

Or $x_{2n} - x_n \to D - D = 0$ donc, par unicité de la limite, $\boxed{D = -\ln\sqrt{2\pi}.}$

---

5. Ainsi $x_n - D = \ln \frac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{n!} \to 0$, donc, par continuité de exp, $\frac{\mathrm{e}^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{n!} \to 1$ puis $\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\mathrm{e}^{-n} n^n.}$

Fin