Devoir Libre n° 9

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier $\boxed{\text{encadrer}}$ tous les résultats et tirer un trait entre les questions.

Homographies

On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive. On note $F=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid ad-bc=1\right\}$.

1. Soit $(a,b,c,d)\in F$.

1.a) Montrer que $\forall z\in\mathscr{H},\quad cz+d\neq 0$.

1.b) Montrer que $\forall z\in\mathscr{H},\ \mathfrak{Im}(ac\bar{z}z+daz+bc\bar{z}+bd)>0$.

1.c) En déduire que l'application $\varphi_{a,b,c,d}:\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{H} & \longrightarrow & \mathscr{H}\\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d}\end{array}\right.$ est bien définie.

Une telle application est appelée *homographie*.
On note désormais $G=\left\{\varphi_{a,b,c,d} \mid (a,b,c,d)\in F\right\}$ l'ensemble des homographies.

2. Soit $(a,b,c,d)\in F$ et $\varphi_{a,b,c,d}\in G$ l'homographie associée.

2.a) Montrer que $\varphi_{a,b,c,d}$ est injective.

2.b) Montrer que $\varphi_{a,b,c,d}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

3. Montrer que $(G,\circ)$ est un groupe.

4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

4.a) Montrer que $(\cos\theta,-\sin\theta,\sin\theta,\cos\theta)\in F$.

On pose $r_\theta=\varphi_{\cos\theta,-\sin\theta,\sin\theta,\cos\theta}$.

4.b) Montrer que l'application $\psi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & G\\ \theta & \longmapsto & r_\theta\end{array}\right.$ est un morphisme de groupes.

4.c) Déterminer le noyau de ce morphisme.

5. Pour $t\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}^*$, on définit l'application f sur $\mathbb{C}^*$ et les applications g_t et h_k sur $\mathbb{C}$ par

$$\forall z,\quad f(z)=\frac{1}{z},\ g_t(z)=z+t,\ h_k(z)=kz.$$

Montrer que tout élément de G est la composée de fonctions de la forme f, g_t et h_k.
On pourra distinguer les cas $c=0$ et $c\neq 0$.

FIN DE L'ÉNONCÉ