Limites, continuité

- Les calculs de limite fonctionnent globalement comme pour les suites : il faut savoir traduire avec des $\epsilon, \eta, A, B, \dots$ les différents cas, mais dans la pratique, les calculs de limite se font à l'aide des théorèmes sur les manipulations de limites. Il peut être utile de poser $x = a+h$ pour se ramener au voisinage de 0.
- Bien connaître les théorèmes avec toutes leurs hypothèses.
- Pour montrer l'existence d'une solution à une équation, on peut penser au théorème des valeurs intermédiaires. Pour l'existence et l'unicité, à celui de la bijection.
- Pour déterminer un équivalent (pour calculer une limite par exemple) en $a \neq 0$, on fait en général un changement de variable $x = a+h$ pour se ramener au voisinage de 0, et utiliser les équivalents usuels.
- Pour les problèmes de points fixes, il est plus facile en général de chercher les zéros de $f - \mathrm{id}$.

1 Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

Voir le TD sur les anneaux...

2 Soit f une application périodique définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est monotone, elle est constante.
2. Montrer plus généralement que si f admet une limite en $+\infty$, elle est constante.
3. Montrer que si f est continue, elle est bornée, atteint ses bornes.

3 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues en 0 telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

4 Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

5 Soit $f \in [0,1]^{[0,1]}$ définie par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1-x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Étudier la continuité de f en tout point de $[0,1]$. Démontrer que f est une bijection.

6 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue et nulle sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f est la fonction nulle. Peut-on généraliser ce résultat ?

7

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite en $+\infty$. Montrer que g est constante.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f admette une limite en $+\infty$, g périodique et $f+g$ croissante.
   Montrer que g est constante.

8 Étudier les limites suivantes au point indiqué :

1. $\dfrac{1}{x}\left(e^{|x|} - 1\right)$ en 0.
2. $\dfrac{1-\cos \alpha x}{2(2-x)(\tan \beta x)}$ en 0 $(\alpha\beta \neq 0)$.
3. $\sqrt{x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma} - \delta x \sqrt{x+2}$ en $+\infty$.
4. $x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ et $x^2 \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ en 0.
5. $\ln x \ln(1 + \ln(1+x))$ en 0.
6. $x\left(e^{1+\frac{1}{x}} - \alpha\right)$ en $+\infty$.
7. $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$ en $+\infty$
8. $(\sin x)^{\ln\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}$ en $\frac{\pi}{2}$.
9. $x\left((1+a)^{1/x} - a^{1/x}\right)$ en $+\infty$ $(a > 0)$.
10. $\tan x \tan 2x$ en $\pi/2$.
11. $\dfrac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2+2x-4}}$ en 2.
12. $\sin \dfrac{1}{x} e^{\cos x}$ en $+\infty$.
13. $\dfrac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x - \pi/3}$ en $\pi/3$.
14. $\sqrt{x^2+1} - x$ en $\pm\infty$.
15. $\dfrac{x}{1 - e^{\frac{x}{2}}}$

9 Déterminer un équivalent en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\left(\tan 2x + \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

10 Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

11 (vu en cours) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède une racine réelle.

12 Un marcheur parcourt 6 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 3 km.

13 Soit $[a,b]$ un segment stable par f continue. Montrer que f admet un point fixe dans $[a,b]$.

14 **Théorème de la corde universelle de Paul Lévy** Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. En utilisant $f\left(\dfrac{k}{n}\right)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = f\left(x_n + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. En considérant sur $[0,1]$, la fonction $f : x \mapsto \sin^2\left(\dfrac{\pi x}{T}\right) - x\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T}\right)$ où $T > 0$, montrer qu'on peut avoir $f(0) = f(1)$ sans qu'il existe de x tel que $f(x) = f(x+T)$.

15 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -\infty$. Montrer que f admet une borne supérieure et que celle-ci est atteinte.