

Dérivation des fonctions numériques

Extrait du programme officiel :

Contenus

Capacités & commentaires

Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
La dérivabilité entraîne la continuité.
Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.
Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a . Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.
Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K , alors f est K -lipschitzienne.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.

Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.

Interprétations géométrique et cinématique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Application à l'étude de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

La fonction f' est alors continue en a .

d) Fonctions de classe \mathcal{C}^k

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe \mathcal{C}^k .



Contenus

Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^k : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Capacités & Commentaires

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

e) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe \mathcal{C}^1 .

Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.

On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Table des matières

15 Dérivation des fonctions numériques	1
I Dérivabilité	4
1 Nombre dérivé et fonction dérivée	4
a Dérivabilité en un point : quelques rappels	4
b Dérivabilité à gauche, à droite	5
c Opérations algébriques	6
d Composition	6
e Dérivée d'une réciproque	7
2 Fonction dérivée	8
II Dérivées successives et classe d'une fonction	9
1 Définition	9
2 Opérations	9
3 \mathcal{C}^k -difféomorphismes (HP)	11
III Applications de la dérivabilité	12
1 Condition nécessaire d'extremum local	12
2 Théorème de Rolle	13
3 Théorème des accroissements finis	14
4 Inégalité des accroissements finis	14
5 Variation des fonctions dérivables	16
6 Théorème de la limite de la dérivée	17
IV Brève extension aux fonctions à valeurs complexes	18



Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

Dérivabilité

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point : quelques rappels

Définition 1

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ et appelée **nombre dérivé de f en a** .

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarques 1

R1 – Interprétation géométrique : Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \rightarrow a$.

D'où l'équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \infty$, f n'est pas dérivable en a , mais il y a une tangente verticale.

R2 – Si on note $\tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, c'est-à-dire $f(x) = f(a) + (x - a)\tau_{f,a}(x)$, alors f est dérivable en a si et seulement si $\tau_{f,a}$ est prolongeable par continuité en a .

Propriété 1 : Caractérisation par développement limité à l'ordre 1

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a)$$

où $o_{x \rightarrow a}(x - a)$ signifie $(x - a)\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (on parle de **développement limité à l'ordre 1**).

Dans ce cas, $f'(a) = \ell$.

Démonstration

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + o_{x \rightarrow a}(x - a) \text{ si et seulement si } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \ell. \quad \blacksquare$$

Propriété 2 : dérivable \Rightarrow continue

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
La réciproque est fausse.

Démonstration

Pour tout $x \neq a$, $f(x) = f(a) + (x - a)\tau_{f,a}(x)$ a bien une limite pour $x \rightarrow a$ qui vaut $f(a)$.
Pour la réciproque, on peut considérer $|\cdot|$ en 0. ■

b **Dérivabilité à gauche, à droite****Définition 2 : Dérivabilité à gauche, à droite**

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a , notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Remarques 2

R1 – Cela donne des demi-tangentes à gauche et à droite de a .

R2 – Si $I = [a, b[$ ou $[a, b]$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite de a .

Exemple 1

$x \mapsto |x|$ en 0.

Propriété 3 : Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

Démonstration

Définition de la limite de $\tau_{f,a}(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ définie sur $I \setminus \{a\}$. ■

Exemple 2

$f(x) = e^{-1/x}$ si $x \geq 0$, 0 sinon.



C Opérations algébriques

Propriété 4 : Opérations sur les dérivées

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- (i) $f + g$ dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- (ii) $f \times g$ dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- (iii) λf dérivable en a et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.
- (iv) Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Démonstration

- (i) $\tau_{f+g,a} = \tau_{f,a} + \tau_{g,a}$.
- (ii) $\tau_{f \times g,a}(x) = \tau_{f,a}(x)g(x) + f(a)\tau_{g,a}(x)$ avec f continue en a .
- (iii) $\tau_{\lambda f,a} = \lambda \tau_{f,a}$.
- (iv) $\tau_{\frac{f}{g},a}(x) = \frac{-\tau_{g,a}(x)}{g(x)g(a)}$ avec g continue en a donne $\left(\frac{1}{g}\right)'$ puis $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. ■

Remarques 3

R1 – Si f est dérivable en a , par récurrence, $f^n = f \times \dots \times f$ et

$$(f^n)'(a) = n f'(a) f^n(a).$$

R2 – Plus généralement, si f_1, \dots, f_n sont dérivables en a , $f_1 \times \dots \times f_n$ l'est aussi et

$$(f_1 \times \dots \times f_n)'(a) = \sum_{k=1}^n f_1(a) \dots f_{k-1}(a) f_k'(a) f_{k+1}(a) \dots f_n(a).$$

d Composition

Propriété 5 : Dérivée d'une composée

Soient I, J sont des intervalles, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Démonstration

- **Première tentative** : $\tau_{f \circ g,a}(x) = \tau_{f,a}(x) \times \tau_{g,f(a)}(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \times g'(f(a))$.



Problème ? $f(x)$ peut être égal à $f(a)$ trop souvent au voisinage de a ...

- **Deuxième tentative** : On a des fonctions φ_f et φ_g continues respectivement en a et $b = f(a)$ telles que si $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x - a)\varphi_f(x)$$

et si $y \in J$,

$$g(y) = g(b) + (y - b)\varphi_g(y).$$

Alors, si $x \in I$,

$$g(f(x)) = g(b) + (f(x) - b)\varphi_g(f(x)) = g(f(a)) + (x - a)\varphi_f(x)\varphi_g(f(x))$$

Et donc

$$g \circ f(x) = g \circ f(a) + (x - a)\varphi_{g \circ f}(x)$$

où $\varphi_{g \circ f}: x \mapsto \varphi_f(x)\varphi_g(f(x))$ est continue en a par opérations sur des fonctions continues. Donc $g \circ f$ est dérivable en a , et

$$g \circ f(a) = \varphi_{g \circ f}(a) = \varphi_f(a)\varphi_g(f(a)) = f'(a) \times g'(f(a)). \quad \blacksquare$$

e Dérivée d'une réciproque

Théorème 1 : Dérivée d'une réciproque en un point

Si I, J intervalles, $f: I \rightarrow J$ bijective, continue sur I et $a \in I$ tel que f est dérivable en a . Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ et alors

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.

Remarque 1

Dans tous les cas, la tangente en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y = x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à \mathcal{C}_f .

Démonstration

Si $y \neq b = f(a)$ et $x = f^{-1}(y)$ alors $x \neq a$ et $\tau_{f^{-1}, b}(y) = \frac{1}{\tau_{f, a}(x)}$.

Or $y \rightarrow b \implies f^{-1}(y) = x \rightarrow a = f^{-1}(b)$ par continuité de f^{-1} en b car f étant injective et continue sur I , elle est strictement monotone et le théorème de la bijection s'applique. Comme $\tau_{f, a}(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a)$, on a bien :

- soit $f'(a) \neq 0$ et f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;
- soit $f'(a) = 0$ et $|\tau_{f^{-1}, b}(y)| \xrightarrow{y \rightarrow b} +\infty$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en b et il y a une tangente verticale. ■

**Remarque 2**

Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

2 Fonction dérivée

Définition 3 : Fonction dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite **dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout $a \in I$.
On définit alors la fonction dérivée

$$f' = Df = \frac{df}{dx} : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f'(x) \end{cases} .$$

Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

Propriété 6 : Opérations

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$,

- (i) $f + g$, $f \times g$, λf sont dérivables sur I et $(f + g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- (ii) Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- (iii) Si $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est dérivable et $(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$.

Propriété 7 : Dérivée d'une réciproque

Si $f: I \rightarrow J$ bijective et dérivable sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x) ; x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$
et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque 3

L'hypothèse de continuité n'est plus utile ici.

II Dérivées successives et classe d'une fonction

1 Définition

Définition 4 : Classe \mathcal{C}^k

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^{e} tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k , $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe \mathcal{C}^k sur I** lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I .
- f est **de classe \mathcal{C}^∞ sur I** lorsque f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.

Remarques 4

R1 – $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$.

R2 – $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

R3 – On retrouve l'ensemble $\mathcal{C}^0(I)$ des fonctions continues sur I .

R4 – On peut être k fois dérivable sans être de classe \mathcal{C}^k .

Par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable en 0 sans y être de classe \mathcal{C}^1 .

Propriété 8 : Caractérisation avec la dérivée

Si $n \geq 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) si et seulement si f est dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^{n-1}).

Alors $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.

2 Opérations

Propriété 9 : Opérations et classe

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et

$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) λf est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et

$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) **Formule de Leibniz**

$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$



(iv) Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I .

(v) Si $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur J , $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I .

Remarque 4

Le formule de Faa di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

Démonstration

Toutes ces propriétés se démontrent par récurrence sur n .

- Par exemple, pour la formule de Leibniz. Elle est vraie pour $n = 0$. Si on la suppose vrai pour un $n \geq 0$, et si f et g sont $n + 1$ fois dérivables, alors ils le sont n fois, donc par hypothèse de récurrence, $f \times g$ l'est et

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Toutes les fonctions intervenant dans la somme étant (au moins) une fois dérivable, on peut dériver de nouveau :

$$\begin{aligned} (f \times g)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

d'après la formule de Pascal, ce qui établit la récurrence.

- Pour la composée, c'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un $n \geq 0$, alors si f et h sont $n + 1$ fois dérivables, elles le sont une fois et $(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$ qui est n fois dérivable par hypothèse de récurrence, donc $h \circ f$ est $n + 1$ fois dérivable.
- Pour la classe \mathcal{C}^n , il suffit de rajouter la continuité de la dernière dérivée dans les preuve.
- Le résultat devient immédiat pour la classe \mathcal{C}^∞ . ■

Propriété 10 : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles \exp , \sin , \cos , \tan , \ln , ch , sh , th , Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 1

Calculer la dérivée n^{e} de $x \mapsto x^2 \cos x$ et la dérivée n^{e} de $x \mapsto e^x \cos x$ par deux méthodes.

3 \mathcal{C}^k -difféomorphismes (HP)**Définition 5 : \mathcal{C}^k -difféomorphismes**

$f: I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme lorsque

- f est bijective,
- f est de classe \mathcal{C}^k sur I ,
- f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J .

Remarque 5

Un \mathcal{C}^0 -difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété 11 : Caractérisation des \mathcal{C}^k -difféomorphismes

Soit $f: I \rightarrow J$ bijective de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$.

Alors f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

Remarque 6

Comme f' est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et f est strictement monotone, donc injective automatiquement.

Démonstration

Le sens \Rightarrow est déjà connu.

Pour l'autre sens, par récurrence sur k .

Pour $k = 1$, on sait déjà que f^{-1} est dérivable sur J si et seulement si f' ne s'annule pas. Ensuite

$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est continue par opérations.

Si c'est vrai pour $k-1 \geq 1$ et f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe \mathcal{C}^{k-1} car f^{-1} est de classe \mathcal{C}^{k-1} par hypothèse de récurrence. Donc f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k . ■



III Applications de la dérivabilité

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 6 : Extremum local

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

- (i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V$, $f(x) \geq f(a)$ (respectivement $f(x) \leq f(a)$).
- (ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in I \cap V$, $f(x) > f(a)$ (respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.

Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Remarque 7

Ainsi, f admet un minimum (respectivement maximum) local en a si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq f(a) \text{ (respectivement } f(x) \leq f(a)\text{)}.$$

si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall h \in \mathbb{R}, a + h \in I \text{ et } |h| \leq \varepsilon \implies f(a + h) \geq f(a) \text{ (respectivement } f(a + h) \leq f(a)\text{)}.$$

Définition 7 : point critique

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que f dérivable en a . On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété 12 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \overset{\circ}{I}$

H2 f est dérivable en a

H3 f admet un extremum local en a

Alors a est un point critique de $f: f'(a) = 0$.

La réciproque est fautive.

Remarques 5

R1 – $a \in \overset{\circ}{I}$ est **indispensable** ! Par exemple $f: \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x \end{cases}$ admet en 0 et 1 des extrema

globaux mais $f'(0) = f'(1) \neq 0$.

R2 – $f : x \mapsto |x|$ admet un minimum global en 0 sans être dérivable en 0.

R3 – Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.

Démonstration

Si, par exemple, f admet un maximum local en a , alors si $x > a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et si $x < a$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Donc la limite commune $f'(a)$ est à la fois positive et négative donc nulle. ■

2 Théorème de Rolle

Théorème 2 : Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

(Dessin)

Remarques 6

R1 – La conclusion s'écrit aussi $\exists t \in]0, 1[, f'(a + th) = 0$ où $h = b - a$.

R2 – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $M(t_0) = M(t_1)$ alors il existe un instant $t \in]t_0, t_1[$ tel que $v_M(t) = 0$.

Démonstration

Puisque f est continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes $m = \min f$ et $M = \max f$.

- Si $m = M$, alors f est constante et tout $c \in]a, b[$ convient.
- Si $m < M$,
 - ★ Si $f(a) \neq M$, on a $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$, avec $f(c) \neq f(a) = f(b)$, donc $c \in]a, b[$. Comme c est un extremum global (donc local) de f , c n'est pas une borne de $[a, b]$ et f est dérivable en c , on a $f'(c) = 0$.
 - ★ Si $f(a) = f(b) = M$, alors $f(a) \neq m$ donc on a $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = m$, avec $f(c) \neq f(a) = f(b)$, donc $c \in]a, b[$. Comme c est un extremum global (donc local) de f , c n'est pas une borne de $[a, b]$ et f est dérivable en c , on a $f'(c) = 0$. ■



3 Théorème des accroissements finis

Théorème 3 : Théorème des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ie $f(b) = f(a) + (b - a)f'(c)$.

(Dessin)

Remarques 7

R1 – Le résultat s'écrit encore $\exists t \in]0, 1[, f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + t(b - a)) = 0$ ie $f(a + h) = f(a) + hf'(a + th)$ où $h = b - a$.

R2 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais y est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.

Démonstration

Important : technique usuelle.

But : trouver $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.

Méthode : former la différence, faire varier b et remplacer $f'(c)$ par un constante.

On pose $\varphi: \begin{cases} [a, b] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - f(a) - A(x - a) \end{cases}$ où A est choisie telle que $\varphi(b) = 0$, c'est-à-dire

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Alors φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$.

Donc d'après le théorème de Rolle, on a $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0 = f'(c) - A$. ■

4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur $[a, b]$

H2 f est dérivable sur $]a, b[$

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M$

Alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

Démonstration

Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis. ■

Remarque 8

Lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], m \leq f'(x) \leq M$, comme $a < b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre a et b et retrouver le résultat.

Définition 8 : Fonction lipschitzienne

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{R}$.

f est dite **k -lipschitzienne** sur D lorsque

$$\forall x, y \in D, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Lorsque $k \in [0, 1[$, on dit que f est **contractante**.

Remarque 9

Une fonction k -lipschitzienne est automatiquement continue.

Corollaire 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$

Alors f est k -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Démonstration

Si $x < y$, on applique l'inégalité des accroissements finies à f sur $[x, y]$ avec $-k \leq f' \leq k$ sur $]x, y[$. ■

Remarques 8

R1 – En particulier, si f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur $\overset{\circ}{I}$.

R2 – Si f est classe \mathcal{C}^1 , on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leq k$ entre x et y (attention à l'ordre des bornes...)



5 Variation des fonctions dérivables

Théorème 5 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I , dérivable sur $\overset{\circ}{I}$.

- (i) f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
- (ii) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$.
- (iii) f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$) sur $\overset{\circ}{I}$ et $\left\{x \in \overset{\circ}{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide ie f' ne s'annule qu'en des points isolés.

Remarque 10

Si f est définie sur D réunion d'intervalles, $f' = 0$ dit que f est constante sur chaque intervalle, $f' \geq 0$ dit que f est croissante sur chaque intervalle...

LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE!

Démonstration

(i) (\Rightarrow) : les taux d'accroissement sont nuls.

(\Leftarrow) : si $f' \equiv 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors si $x, y \in I$ tels que $x < y$, f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$ donc par théorème des accroissement fini, on a $c \in]x, y[\overset{\circ}{I}$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0$.

(ii) (\Rightarrow) : Si f est croissante, pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$, pour tout $a \in \overset{\circ}{I}$, $\tau_{f,a}(x) \geq 0$ donc $f'(a) \geq 0$.

(\Leftarrow) : Si, réciproquement, $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, alors si $x, y \in I$ tels que $x < y$, f est continue sur $[x, y]$, dérivable sur $]x, y[$ donc par théorème des accroissement fini, on a $c \in]x, y[\overset{\circ}{I}$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \geq 0$.

(iii) Contraposées :

(\Rightarrow) : Si f s'annule sur un intervalle J d'intervalle non vide, alors $f' \equiv 0$ sur $\overset{\circ}{J}$ et la monotonie n'est pas stricte.

(\Leftarrow) : Si la monotonie de f n'est pas stricte, on peut trouver $x, y \in I$ tels que $x < y$ et $f(x) = f(y)$. Alors f est constante sur $[x, y]$ et f' est nulle sur un intervalle d'intérieur non vide. ■

Exemple 3

$f: x \mapsto x^3$ est strictement croissante malgré le fait que $f'(0) = 0$.

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 6 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$

H2 f est continue en a

H3 $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Donc

- soit $\ell = \pm\infty$ et \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en a ,
- soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' est continue en a .

Remarques 9

R1 – Si f' n'a pas de limite en a , on ne peut pas conclure.

Exemples 1

E1 – $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

f est dérivable sur \mathbb{R}^* et si $x \neq 0$, $f' : x \mapsto 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ qui n'a pas de limite en 0.

Et pourtant $\frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ (mais f' n'est pas continue en 0).

E2 – $f : x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0. f n'est pas dérivable en 0 et $f' : x \mapsto \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (avec $x_n = n\pi$).

R2 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f : x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R3 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement \mathcal{C}^1 . Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable !

Démonstration

Si $x \in I$ tel que $x > a$, f est continue sur $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$, par théorème des accroissements finis, on a $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Comme $a \leq c_x \leq x$, si $x \rightarrow a^+$, $f'(c_x) \rightarrow \ell$ et donc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^+} \ell$ par composition des limites.

On montre de même que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \ell$. ■



Exercice 2 : Théorème du prolongement \mathcal{C}^k

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathcal{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a . Montrer que le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe \mathcal{C}^k sur I .

Comme f a une limite finie en a , on la prolonge en posant $\tilde{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. On vérifie qu'alors \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^k en a également.

Comme \tilde{f} est continue en a , dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\tilde{f}' = f'$ a une limite finie en a , alors par théorème de la limite de la dérivée, \tilde{f} est dérivable en a et sa dérivée est continue en a .

On obtient ainsi, par récurrence finie que pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\tilde{f}^{(p)}$ est dérivable en a et à dérivée continue en a .

IV Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Héritée directement des propriétés sur les limites, on a :

Propriété 13 : Parties réelle et imaginaire de la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ le sont et on a $\Re(f') = \Re(f)'$ et $\Im(f') = \Im(f)'$

Théorème 7 : Inégalité des accroissements finis

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 on a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leq k$ sur $\overset{\circ}{I}$

Alors f est k -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire

$$\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

Démonstration

Admis provisoirement, prouvé dans le cas \mathcal{C}^1 avec les intégrales. ■

Remarques 10

R1 – Avec $k = 0$, on retrouve le fait que si la dérivée est nulle sur $\overset{\circ}{I}$, la fonction est constante sur I . Ce qui se prouve également en passant par $\Re f$ et $\Im f$.

R2 – Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont plus valables dans \mathbb{C} .

Exemple 4

$f : x \mapsto e^{ix}$ sur $[0, 2\pi]$ vérifie bien les hypothèses, avec $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant $|f'| = 1 \dots$