

Dérivation des fonctions numériques

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

I Dérivabilité

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point : quelques rappels

Définition 1

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si et seulement si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite lorsque $x \rightarrow a$ si et seulement si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \rightarrow 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ et appelée **nombre dérivé de f en a** .

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Remarques 1

R1 – Interprétation géométrique : Il s'agit de la limite des cordes dont une extrémité est le point $(a, f(a))$ lorsque $x \rightarrow a$.

D'où l'équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Si $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow \infty$, f n'est pas dérivable en a , mais il y a une tangente verticale.

R2 – Si on note $\tau_{f,a}(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, c'est-à-dire $f(x) = f(a) + (x - a)\tau_{f,a}(x)$, alors f est dérivable en a si et seulement si $\tau_{f,a}$ est prolongeable par continuité en a .

Propriété 1 : Caractérisation par développement limité à l'ordre 1

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

où $\frac{o}{x \rightarrow a}(x - a)$ signifie $(x - a)\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (on parle de **développement limité à l'ordre 1**).

Dans ce cas, $f'(a) = \ell$.

Propriété 2 : dérivable \implies continue

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

La réciproque est fautive.

b Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 2 : Dérivabilité à gauche, à droite

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a , notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Remarques 2

R1 – Cela donne des demi-tangentes à gauche et à droite de a .

R2 – Si $I = [a, b[$ ou $]a, b]$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite de a .

Exemple 1

$x \mapsto |x|$ en 0.



Propriété 3 : Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite

Si $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

Exemple 2

$$f(x) = e^{-1/x} \text{ si } x \geq 0, 0 \text{ sinon.}$$

c Opérations algébriques

Propriété 4 : Opérations sur les dérivées

Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ dérivable en a et

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(ii) $f \times g$ dérivable en a et

$$(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) λf dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

(iv) Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

Remarques 3

R1 – Si f est dérivable en a , par récurrence, $f^n = f \times \dots \times f$ et

$$(f^n)'(a) = n f'(a) f^n(a).$$

R2 – Plus généralement, si f_1, \dots, f_n sont dérivables en a , $f_1 \times \dots \times f_n$ l'est aussi et

$$(f_1 \times \dots \times f_n)'(a) = \sum_{k=1}^n f_1(a) \dots f_{k-1}(a) f'_k(a) f_{k+1}(a) \dots f_n(a).$$

d Composition

Propriété 5 : Dérivée d'une composée

Soient I, J sont des intervalles, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

e Dérivée d'une réciproque

Théorème 1 : Dérivée d'une réciproque en un point

Si I, J intervalles, $f: I \rightarrow J$ bijective, continue sur I et $a \in I$ tel que f est dérivable en a .

Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) = f'(f^{-1}(b)) \neq 0$ et alors

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.

Remarque 1

Dans tous les cas, la tangente en $(b, f^{-1}(b)) = (f(a), a)$ à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ est l'image par la symétrie d'axe d'équation $y = x$ de la tangente en $(a, f(a))$ à \mathcal{C}_f .

Remarque 2

Pour retrouver la formule, il suffit de dériver $f \circ f^{-1} = \text{id}$.

2 Fonction dérivée

Définition 3 : Fonction dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite **dérivable sur I** lorsque f est dérivable en tout $a \in I$.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = Df = \frac{df}{dx} : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f'(x) \end{cases}.$$

Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

Propriété 6 : Opérations

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $f + g, f \times g, \lambda f$ sont dérivables sur I et $(f+g)' = f' + g', (fg)' = f'g + fg', (\lambda f)' = \lambda f'$.

(ii) Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

(iii) Si $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est dérivable et $(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$.

Propriété 7 : Dérivée d'une réciproque

Si $f : I \rightarrow J$ bijective et dérivable sur I , alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x) ; x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque 3

L'hypothèse de continuité n'est plus utile ici.

- f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I lorsque f est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur I .

Remarques 4

R1 – $f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f'''$.

R2 – $\forall p, q \in \mathbb{N}, (f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

R3 – On retrouve l'ensemble $\mathcal{C}^0(I)$ des fonctions continues sur I .

R4 – On peut être k fois dérivable sans être de classe \mathcal{C}^k . Par exemple $f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ est dérivable en 0 sans y être de classe \mathcal{C}^1 .

Propriété 8 : Caractérisation avec la dérivée

Si $n \geq 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) si et seulement si f dérivable et f' est $n - 1$ fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^{n-1}). Alors $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.

II Dérivées successives et classe d'une fonction

1 Définition

Définition 4 : Classe \mathcal{C}^k

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^{e} tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout $k, f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.
- Si $k \in \mathbb{N}, f$ est de classe \mathcal{C}^k sur I lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I . On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^k sur I .

2 Opérations

Propriété 9 : Opérations et classe

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I , $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.

(ii) λf est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$.

(iii) **Formule de Leibniz**
 $f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I et



- (iv) Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I .
- (v) Si $h: J \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur J , $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe \mathcal{C}^n) sur I .

Remarque 4

Le formule de Faa di Bruno (hors-programme) donne une expression de $(f \circ g)^{(n)}$.

Propriété 10 : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles \exp , \sin , \cos , \tan , \ln , ch , sh , th , Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 1

Calculer la dérivée n^{e} de $x \mapsto x^2 \cos x$ et la dérivée n^{e} de $x \mapsto e^x \cos x$ par deux méthodes.

3 \mathcal{C}^k -difféomorphismes (HP)

Définition 5 : \mathcal{C}^k -difféomorphismes

$f: I \rightarrow J$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme lorsque

- f est bijective,
- f est de classe \mathcal{C}^k sur I ,
- f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J .

Remarque 5

Un \mathcal{C}^0 -difféomorphisme est un homéomorphisme.

Propriété 11 : Caractérisation des \mathcal{C}^k -difféomorphismes

Soit $f: I \rightarrow J$ bijective de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$.

Alors f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

Remarques 5

R1 – C'est donc la même condition qui permet à f^{-1} d'être dérivable et qui lui donne la même classe que f !

R2 – Comme f' est continue, si elle ne s'annule pas, elle garde un signe constant et f est strictement monotone, donc injective automatiquement.



Applications de la dérivabilité

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 6 : Extremum local

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet un **minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que

(respectivement

(ii) On dit que f admet un **minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que

(respectivement

On parle alors d'**extremum local**.

Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Remarque 6

Ainsi, f admet un minimum (respectivement maximum) local en a si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq f(a)$$

(respectivement $f(x) \leq f(a)$),
si et seulement si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall h \in \mathbb{R}, a+h \in I \text{ et } |h| \leq \varepsilon \implies f(a+h) \geq f(a)$$

(respectivement $f(a+h) \leq f(a)$).

Définition 7 : point critique

Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{I}$ tel que f dérivable en a . On dit que a est un **point critique** de f lorsque

Propriété 12 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1

H2

H3

Alors a est un pont critique de $f: f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse.

Remarques 6

R1 – $a \in \overset{\circ}{I}$ est **indispensable!** Par exemple
 $f: \begin{cases} [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ admet en 0 et 1 des extrema globaux mais $f'(0) = f'(1) \neq 0$.

R2 – $f: x \mapsto |x|$ admet un minimum global en 0 sans être dérivable en 0.

R3 – Les extrema sont à chercher **parmi** les points intérieurs critiques et les points au bord.

2 Théorème de Rolle

Théorème 2 : Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Si

H1

H2

H3

Alors

Remarques 7

R1 – La conclusion s'écrit aussi

$$\exists t \in]0, 1[, f'(a + th) = 0$$

où $h = b - a$.

R2 – **Interprétation cinématique** : Si un mobile M a une trajectoire **rectiligne** tel que $M(t_0) = M(t_1)$ alors il existe un instant $t \in]t_0, t_1[$ tel que $v_M(t) = 0$.

3 Théorème des accroissements finis

Théorème 3 : Théorème des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Si

H1

H2

Alors

Remarques 8

R1 – Le résultat s'écrit encore

$$\exists t \in]0, 1[, f(b) = f(a) + (b - a)f'(a + t(b - a)) = 0$$

ie $f(a + h) = f(a) + hf'(a + th)$ où $h = b - a$.

R2 – Ce résultat généralise a priori le théorème de Rolle, mais y est en fait strictement équivalent car on va utiliser ce théorème dans la preuve.



4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.
Si

H1

H2

H3

Alors

Corollaire 1

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Si

H1

H2

H3

Alors f est k -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Remarques 9

- R1** – En particulier, si f est dérivable sur I , f est lipschitzienne sur I si et seulement si f' est bornée sur I .
- R2** – Si f est classe \mathcal{C}^1 , on peut à nouveau retrouver le résultat directement en intégrant $|f'| \leq k$ entre x et y (attention à l'ordre des bornes...)

Remarque 7

Lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b], m \leq f'(x) \leq M$, comme $a < b$, on peut intégrer membre à membre l'inégalité entre a et b et retrouver le résultat.

5 Variation des fonctions dérivables

Théorème 5 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur I , dérivable sur I .

(i) f est constante sur I si et seulement si

(ii) f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si (respectivement) sur

(iii) f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si

Définition 8 : Fonction lipschitzienne

Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
 f est dite **k -lipschitzienne** sur D lorsque

Lorsque $k \in [0, 1[$, on dit que f est **contractante**.

Remarque 8

Une fonction k -lipschitzienne est automatiquement continue.

Remarque 9

⚠ Si f est définie sur D réunion d'intervalles, $f' = 0$ dit que f est constante sur chaque intervalle, $f' \geq 0$ dit que f est croissante sur chaque intervalle...

LA CONSTANTE DÉPEND DE L'INTERVALLE!

Exemple 3

$f: x \mapsto \dots$ est strictement croissante malgré le fait que $f'(0) = 0$.

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 6 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1

H2

H3

Alors

Donc

- soit $\ell = \pm\infty$ et \mathcal{C}_f admet une tangente verticale en a ,
- soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a , $f'(a) = \ell$ et f' **est continue en a** .

Remarques 10

R1 – Si f' n'a pas de limite en a , on ne peut pas conclure.

Exemples 1

E1 – $f: x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

E2 – $f: x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0.

R2 – Il faut que f soit continue en a : par exemple, $f: x \mapsto \delta_{x,0}$ est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et pourtant f n'est pas dérivable en 0.

R3 – Ce théorème donne aussi la continuité au point de la dérivée : et donc un caractère localement \mathcal{C}^1 .

Cependant, une fonction peut être dérivable sans que la dérivée soit continue. Donc ne pas pouvoir appliquer le théorème de la limite de la dérivée ne signifie pas que la fonction n'est pas dérivable!

R4 – ⚠ : on ne parle **jamais** de prolongement de la dérivée (par continuité ou autre...) Ce résultat indique que la fonction est **dérivable** en a et donne la valeur de $f'(a)$.

Exercice 2 : Théorème du prolongement \mathcal{C}^k

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $f \in \mathcal{C}^k(I \setminus \{a\})$ telle que $\forall i \in [0, k], f^{(i)}$ a une limite finie en a . Montrer que le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe \mathcal{C}^k sur I .

IV Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Propriété 13 : Parties réelle et imaginaire de la dérivée

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{C}$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) si et seulement si $\Re f$ et $\Im f$ le sont et on a $\Re(f') = \Re(f)'$ et $\Im(f') = \Im(f)'$

Théorème 7 : Inégalité des accroissements finis

Si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

H1 f est continue sur I

H2 f est dérivable sur $\overset{\circ}{I}$

H3 on a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leq k$ sur $\overset{\circ}{I}$

Alors f est k -lipschitzienne sur I , c'est-à-dire $\forall x, x' \in I, |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$.

Remarques 11

R1 – Avec $k = 0$, on retrouve le fait que si la dérivée est nulle sur $\overset{\circ}{I}$, la fonction est constante sur I . Ce qui se prouve également en passant par $\Re f$ et $\Im f$.

R2 – ⚠ Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne sont plus valables dans \mathbb{C} .