15 Dérivation des fonctions numériques

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

I Dérivabilité

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

a Dérivabilité en un point : quelques rappels

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie lorsque $x \to a$ si et seulement si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite lorsque $h \to 0$.

Cette limite est alors notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ et appelée **nombre dérivé de** f **en** a.

Lorsqu'elle existe, on a donc

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Propriété 1 : Caractérisation par développement limité à l'ordre 1

f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = f(a) + \ell(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$$

*où $\underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$ signifie $(x-a)\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ (on parle de **développement limité à l'ordre 1**).*

Dans ce cas, $f'(a) = \ell$.

Propriété 2 : dérivable $\Longrightarrow$ continue

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.
La réciproque est fausse.

b Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 2 : Dérivabilité à gauche, à droite

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f est dite **dérivable à gauche** (respectivement **à droite**) de a lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite à gauche (respectivement à droite) de a, notée $f'_g(a)$ (respectivement $f'_d(a)$).

Propriété 3 : Caractérisation de la dérivabilité par la dérivabilité à gauche et à droite

Si $a \in \mathring{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
On a alors $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$

c Opérations algébriques

Propriété 4 : Opérations sur les dérivées

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f+g$ dérivable en a et

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

(ii) $f \times g$ dérivable en a et

$$(f\times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(iii) λf dérivable en a et

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

(iv) Si g ne s'annule pas, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.$$

d Composition

Propriété 5 : Dérivée d'une composée

Soient I, J sont des intervalles, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset J$ et $a \in I$.
Si f est dérivable en a et g est dérivable en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g' \circ f(a).$$

e Dérivée d'une réciproque

Théorème 1 : Dérivée d'une réciproque en un point

Si I, J intervalles, $f : I \to J$ bijective, continue sur I et $a \in I$ tel que f est dérivable en a.
Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) = f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$ et alors

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Si $f'(a) = 0$, alors le graphe de f admet une tangente verticale en $b = f(a)$.

2 Fonction dérivée

Définition 3 : Fonction dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite **dérivable sur** I lorsque f est dérivable en tout $a \in I$.

On définit alors la fonction dérivée

$$f' = \mathrm{D}f = \frac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,x} : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right. .$$

Les propriétés de dérivation de somme, produit, combinaison linéaire quotient par une fonction jamais nulle de fonctions dérivable s'étendent naturellement aux fonctions dérivables sur un intervalle.

Propriété 6 : Opérations

Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) *$f + g$, $f \times g$, λf sont dérivables sur I et $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$.*

(ii) *Si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$*

(iii) *Si $h : J \to \mathbb{R}$ dérivable sur J tel que $f(I) \subset J$, alors $h \circ f$ est dérivable et $(h \circ f)' = f' \times h' \circ f$.*

Propriété 7 : Dérivée d'une réciproque

Si $f : I \to J$ bijective et dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\{f(x) \,;\, x \in I \text{ et } f'(x) \neq 0\}$ et $\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

II Dérivées successives et classe d'une fonction

1 Définition

Définition 4 : Classe $\mathscr{C}^k$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Lorsque f est dérivable n fois, note $f^{(n)}$ sa dérivée n^{e} tel que $f^{(0)} = f$ et pour tout k, $f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$.
- Si $k \in \mathbb{N}$, f est **de classe** $\mathscr{C}^k$ **sur** I lorsque f est k fois dérivable et $f^{(k)}$ est continue sur I.
  On note $\mathscr{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.
- f est **de classe** $\mathscr{C}^\infty$ **sur** I lorsque f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire lorsque f est indéfiniment dérivable.
  On note $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

Propriété 8 : Caractérisation avec la dérivée

Si $n \geqslant 1$, f est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) si et seulement si f dérivable et f' est $n-1$ fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^{n-1}$).

Alors $f^n = (f')^{(n-1)}$.

2 Opérations

Propriété 9 : Opérations et classe

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) *$f + g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*
$$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}.$$

(ii) *λf est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et*
$$(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

(iii) ***Formule de Leibniz***
$f \times g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I et
$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

(iv) *Si g ne s'annule pas sur I, $\frac{f}{g}$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

(v) *Si $h : J \to \mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset J$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur J, $f \circ g$ est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I.*

Propriété 10 : Fonctions usuelles

Les fonctions usuelles $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\ln$, ch, sh, th, Arctan et polynomiales ou rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Les fonctions Arcsin et Arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

$\sqrt{\cdot}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3 $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes (HP)

Définition 5 : $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes

$f : I \to J$ est un **$\mathscr{C}^k$-difféomorphisme** lorsque
- f est bijective,
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,
- f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Propriété 11 : Caractérisation des $\mathscr{C}^k$-difféomorphismes

Soit $f : I \to J$ bijective de classe $\mathscr{C}^k$ avec $k \geqslant 1$.
Alors f est un $\mathscr{C}^k$-difféomorphisme (ie f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.

III Applications de la dérivabilité

1 Condition nécessaire d'extremum local

Définition 6 : Extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$.

(i) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in I \cap V, \quad f(x) \geqslant f(a)$$

(respectivement $f(x) \leqslant f(a)$).

(ii) On dit que f admet **un minimum** (respectivement **maximum**) **local strict** en a lorsqu'il existe un voisinage V de a tel que

$$\forall x \in I \cap V, \quad f(x) > f(a)$$

(respectivement $f(x) < f(a)$).

On parle alors d'**extremum local**.
Lorsque $V = \mathbb{R}$, on parle d'**extremum global**.

Définition 7 : point critique

Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathring{I}$ tel que f dérivable en a. On dit que a est un **point critique** de f lorsque $f'(a) = 0$.

Propriété 12 : Condition nécessaire d'extremum local

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 $a \in \mathring{I}$

H2 *f est dérivable en a*

H3 *f admet un extremum local en a*

Alors a est un pont critique de f : $f'(a) = 0$.
La réciproque est fausse.

2 Théorème de Rolle

Théorème 2 : Théorème de Rolle

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a, b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a, b[$*

H3 $f(a) = f(b)$

Alors $\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = 0$.

3 Théorème des accroissements finis

Théorème 3 : Théorème des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a, b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a, b[$*

Alors

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ie $f(b) = f(a) + (b - a) f'(c)$.

4 Inégalité des accroissements finis

Théorème 4 : Inégalité des accroissements finis

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur $[a, b]$*

H2 *f est dérivable sur $]a, b[$*

H3 $\exists m, M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$

Alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.

Définition 8 : Fonction lipschitzienne

Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$.
f est dite k-**lipschitzienne** sur D lorsque

$$\forall x, y \in D, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

Lorsque $k \in [0, 1[$, on dit que f est **contractante**.

Corollaire 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 $\exists k \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathring{I}, \quad |f'(x)| \leqslant k$

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

5 Variation des fonctions dérivables

Théorème 5 : Variation des fonctions dérivables

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$.

(i) *f est constante sur I si et seulement si $f' \equiv 0$ sur $\mathring{I}$.*

(ii) *f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$.*

(iii) *f est strictement croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur $\mathring{I}$ et $\left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ ne contient aucun intervalle d'intérieur non vide ie f' ne s'annule qu'en des points isolés.*

6 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 6 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que

H1 *f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$*

H2 *f est continue en a*

H3 *$f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$*

Alors $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Donc

- *soit $\ell = \pm\infty$ et $\mathscr{C}_f$ admet une tangente verticale en a,*
- *soit $\ell \in \mathbb{R}$ et f est dérivable en a, $f'(a) = \ell$ et f'* ***est continue en*** *a.*

IV Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Héritée directement des propriétés sur les limites, on a :

Propriété 13 : Parties réelle et imaginaire de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

f est dérivable en $a \in I$ (respectivement sur I) si et seulement si $\mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\, f$ le sont et on a $\mathfrak{Re}\left(f'\right) = \mathfrak{Re}(f)'$ et $\mathfrak{Im}\left(f'\right) = \mathfrak{Im}(f)'$

Théorème 7 : Inégalité des accroissements finis

Si $f : I \to \mathbb{C}$ telle que

H1 *f est continue sur I*

H2 *f est dérivable sur $\mathring{I}$*

H3 *on a $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leqslant k$ sur $\mathring{I}$*

Alors f est k-lipschitzienne sur I, c'est-à-dire $\forall x, x' \in I,\ \left|f(x) - f(x')\right| \leqslant k\left|x - x'\right|$.