

Extrait du programme officiel :

Contenus

Capacités & commentaires

a) Généralités

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$,
 $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments x_1, \dots, x_n de I .

Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Interprétation géométrique.

Tout développement général sur les barycentres est hors programme.

b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.



Table des matières

16 Convexité	1
I Fonctions convexes d'une variable réelle	2
1 Définitions	2
2 Caractérisations	3
3 Cas des fonctions dérivables	3
4 Inégalités de convexité	4
II Que faut-il savoir faire ?	5

Dans ce chapitre, le plus important, ce sont les dessins !

I Fonctions convexes d'une variable réelle

I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

1 Définitions

Définition 1 : Fonction convexe, concave

- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

Remarques 1

R1 – On pourrait se contenter de $t \in]0, 1[$.

R2 – Concave n'est pas le contraire de convexe !

On peut être les deux à la fois (quand ?) et on n'est en général ni l'un ni l'autre.

La définition donne immédiatement l'interprétation géométrique suivante :

Propriété 1 : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Remarque 1

Un point en lequel il y a un changement de concavité est appelé **point d'inflexion**.

Définition 2 : Épigraphe

La partie $\mathcal{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x, y) \in \mathcal{E}(f) \iff y \geq f(x)$$

2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins!

Propriété 2 : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathcal{E}(f)$ est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Propriété 3 : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I .

(ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I, x < y < z$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

(iii) **Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases} \text{ est croissante}$$

Démonstration

(i) \Rightarrow (ii) $y = (1 - t)x + tz \dots$

(ii) \Rightarrow (iii) Séparer trois cas suivant la position par rapport à a .

(iii) \Rightarrow (i) τ_x .

Exercice 1

Montrer qu'une fonction convexe sur I admet en chaque point de $\overset{\circ}{I}$ une dérivée à gauche et une dérivée à droite et en déduire que f est continue sur $\overset{\circ}{I}$.

Est-ce le cas sur I ?

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété 4 : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Démonstration

Si f est convexe, dans l'inégalité des trois cordes, faire tendre z vers x à gauche puis vers y à droite.

Si f' est croissante, dériver $\varphi : z \mapsto f((1 - t)z + ty) - (1 - t)f(z) - tf(y)$ sur $[x, y]$.



Corollaire 1 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I .

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geq 0$ (respectivement $f'' \leq 0$) sur I .

Propriété 5 : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I .

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

Démonstration

- Si la courbe de f est au dessus de ses tangentes, posons $x < y$. Soit $t \in]0, 1[$, $z = (1-t)x + ty$ et donc $t = \frac{z-x}{y-x}$, le fait que la courbe de f est au dessus de la tangente en z , d'équation $Y = f'(z)(X-z) + f(z)$ se traduit par $f(x) \geq f'(z)(x-z) + f(z)$ et $f(y) \geq f'(z)(y-z) + f(z)$ ce qui donne

$$(y-z)(f(z) - f(x)) \leq (z-x)(y-z)f'(z) \leq (z-x)(f(y) - f(z))$$

(avec $z-x < 0$ et $y-z > 0$) et donc $(y-x)f(z) \leq (y-z)f(x) + (z-x)f(y)$ et enfin $f(z) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

- Si f est convexe et dérivable, pour $a \in I$, on veut montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$. Pour cela, on pose $\varphi_a : x \in I \mapsto f(x) - f'(a)(x-a)$, dérivable sur I , de dérivée $\varphi'_a : x \mapsto f'(x) - f'(a)$. Par croissance de f' , φ_a est décroissante avant a et croissante après, donc admet un minimum en a , avec $\varphi_a(a) = f(a)$, ce qui permet bien de trouver l'inégalité voulue. ■

Exercice 2

Étudier la convexité de \exp , \ln , $t \mapsto t^\alpha$ sur \mathbb{R}_+^* , \sin , \tan .

4 Inégalités de convexité

Propriété 6 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

- Si f est convexe, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
- Si f est concave, $f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.

Démonstration

Cas f convexe. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, on pose P_n : « pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) ».$$

Initialisation : rien à faire pour $n = 1$. Pour $n = 2$, c'est la définition d'une fonction convexe.

Hérédité : Soit un $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel P_n est vraie et soient $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors tous les autres λ_i sont nuls et il n'y a rien à faire.

Sinon, $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 - \lambda_{n+1} \neq 0$, on pose $x = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \lambda x + \lambda_{n+1} x_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1})x + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

Alors, par définition de la convexité, puis par HR, comme les $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ sont positifs de somme 1,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq (1 - \lambda_{n+1})f(x) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \leq \lambda \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

ce qui établit la récurrence.

Remarque 2

Se rencontre souvent avec des poids tous égaux à $\frac{1}{n}$, ce qui donne $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

Exemples 1 : Très classiques

E1 – Inégalité arithmético-géométrique : pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$. Qu'obtient-on en remplaçant x_i par $\frac{1}{x_i}$?

E2 – $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1+x$.

E3 – $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

III Que faut-il savoir faire ?

- Savoir démontrer qu'une fonction dérivable ou deux fois dérivable est convexe.
- Reconnaître une inégalité de convexité, sous forme de somme ou de produit (et donc d'abord écrire l'inégalité « générique », avec les $1/n$ (surtout) ou avec les λ_i (un peu quand même).)
- Savoir traduire par une inégalité le fait que le graphe d'une fonction convexe est en-dessus de ses tangentes.
- Savoir que $\ln(1+x) \leq x$ si $x \geq -1$.
- Savoir passer de la « convexité pour 2 » à la « convexité pour n ».
- Savoir dessiner une fonction convexe...